Inês Isabel Susano Gomes Mota
Mestrado em Estatística e Otimização

Aprendizagem das Funções no 10.ºano: Uma abordagem através do Ensino Exploratório

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Ensino da Matemática no 3.ºciclo do Ensino Básico e no
Secundário

Orientador: Prof.Dr. António Domingos FCT-UNL
Co-orientador: Profª Maria Teresa de Brito, Escola
Secundária Jorge Peixinho

Júri:

Presidente: Prof. Doutora Maria Helena Coutinho Gomes Almeida Santos
Arguente: Prof. Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha
Vogal: Prof. Maria Teresa de Brito
Vogal: Prof. Doutor António Manuel Dias Domingos

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Julho de 2017

APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES NO 10º ANO: ABORDAGEM ATRAVÉS DO ENSINO EXPLORATÓRIO

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor António Domingos, que teve a gentileza de aceitar ser meu orientador, pela força dada em todos os momentos de grande impasse e pela forma disponível, rigorosa e interessada com que orientou este projeto, pelas suas sugestões e críticas pertinentes.

À Professora Maria Teresa de Brito, minha orientadora, pelos seus conselhos relativos à intervenção pedagógica e pela partilha de experiências, em especial pelas sugestões e comentários tecidos ao longo das várias fases.

À Professora Doutora Maria Helena Santos, coordenadora do Mestrado em Ensino da Matemática, pela sua compreensão e ajuda durante todo o meu percurso.

À Escola que possibilitou a elaboração e concretização deste projeto, aos alunos pela simpatia com que me receberam, e sobretudo pela sua colaboração e disponibilidade ao longo do ano.

Às minhas colegas Isabel Gaspar e Isabel Martelo pela força dada durante toda a parte letiva do Mestrado.

À minha família por nunca me ter deixado desistir. Aos meus pais, por todo o seu carinho e apoio incondicional que sempre me deram. Ao meu marido, Pedro, por todo o amor com que me tem apoiado ao longo da nossa vida. Às minhas três lindas princesas que com todo o seu amor carinho, sorrisos e abraços iluminam os meus dias dando-me força mesmo nos dias mais cinzentos.

Resumo

A primeira parte deste trabalho descreve a minha prática pedagógica durante o meu estágio na escola Secundária Jorge Peixinho sob a orientação da Prof. Teresa Brito.

Como consequência da necessidade crescente de desenvolvimento das competências dos alunos, a escola tem, obrigatoriamente, de refletir sobre as suas práticas educativas e saber em que medida é que as metodologias de ensino podem ser utilizadas como armas para potenciar desenvolvimento de competências e raciocínio matemático. Vários autores defendem alterações progressivas na politica seguida em sala de aula, sugerindo a adoção de uma abordagem mais exploratória com recurso a tarefas de investigação e resolução de problemas.

Seguindo esta linha de pensamento, com a qual me identifico, escolhi um tema que contribuisse para esta reflexão. O estudo apresentado pretende conhecer os processos de raciocínio utilizados pelos alunos num estudo exploratório com recurso a tarefas de investigação e de exploração. Queremos assim compreender quais as tarefas a propor aos alunos, identificar as suas potencialidade e dificuldades de concretização no ensino e na aprendizagem, nomeadamente de funções. Com esta investigação pretendeu-se compreender como lidam os alunos com tarefas de índole exploratório. As questões que orientaram o estudo foram:

1. Como se carateriza a compreensão dos conceitos no estudo das funções a partir de uma abordagem centrada no ensino exploratório?

2. Como se caracterizam os raciocínios desenvolvidos pelos alunos quando envolvidos em ambientes de ensino exploratório?

3. Qual o papel das diferentes representações na aprendizagem do conceito de função?

4. Qual o papel da calculadora gráfica no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos?

A metodologia usada é de natureza qualitativa, tendo por base o paradigma interpretativo. É feito o estudo de caso de seis alunos que apresentam diferentes níveis de desempenho escolar em Matemática. Para dar resposta a estas questões recorreu-se aos seguintes métodos de recolha de dados: (i) relatórios escritos; (ii) resolução de problemas; (iii)diário de bordo; (iii) entrevistas semi-estruturadas;

Os resultados obtidos levavam-nos a concluir que apesar de os alunos terem apreendido os conceitos estudados, eles apenas apreenderam operacionalmente os conceitos, tendo-se observado uma compartimentalização dos conhecimentos adquiridos. Para a resolução das tarefas os alunos utilizaram um raciocínio indutivo, mas não conseguiram atingir a fase da generalização.

Abstract

The first part of this paper describes my pedagogical practice during my internship at Escola Secundária Jorge Peixinho, under the guidance of Prof. Teresa Brito.

As a consequence of the growing need for the d3evelopment of students' competences, the school must reflect on its educational practices and the extent to which teaching methodologies can be used as weapons to foster development of mathematical skills and reasoning. Several authors claim for progressive changes in the politics followed in the classroom, suggesting the adoption of a more exploratory approach using research tasks and problem solving.

Following this line of thought, with which I identify me, I chose a theme that would contribute to this reflection. The present study intends to study the reasoning processes used by students in an exploratory study, using research and exploration tasks. We want to better understand which tasks should be proposed to the students, to identify their potentialities and difficulties of concretization in the teaching and learning process of mathematical functions. The aim of this research was to understand how students deal with exploratory tasks. The questions that guided the study were:

1. How is the understanding of concepts in the study of functions characterized by an exploratory teaching approach?
2. How is the reasoning developed by students involved in exploratory teaching environments characterized?
3. What is the role of different representations in the learning of the concept of functions?
4. What is the role of the graphing calculator in developing students' mathematical reasoning?

The methodology used is of a qualitative nature, based on the interpretative paradigm. A case study of six students with different levels of results in Mathematics is performed. In order to answer these questions, the following methods of data collection were used: (i) written reports; (Ii) problem solving; (Iii) logbook; (Iii) semi-structured interviews;

The results obtained led us to conclude that although the students had grasped the studied concepts, they only apprehended the concepts operationally, and a compartmentalization of the acquired knowledge was observed. In order to solve the tasks, the students used an inductive reasoning, but they were not able to reach the generalization phase.

Índice

PARTE I

1 - INTRODUÇÃO

O presente documento pretende ilustrar as dimensões exploradas no estágio pedagógico realizado por mim, Inês Mota, integrado no Mestrado em Ensino da Matemática pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa (FCT-UNL).

O estágio teve início a 15 de setembro de 2014 e decorreu na Escola Secundária Jorge Peixinho, Montijo, durante o ano letivo de 2014/2015. O núcleo de estágio foi constituído por apenas dois elementos, a orientadora Professora Maria Teresa de Brito e eu como estagiária. A qualidade pedagógica e científica do estágio foi assegurada pelo acompanhamento e supervisão de um responsável científico da FCT-UNL, professora Doutora Maria Helena Santos.

A reflexão na prática pedagógica como aluna estagiária, incluiu na atividade letiva a observação de duas turmas da Professora Teresa, uma de 10ºano e outra de 11º ano, e regência de aulas que foi realizada na turma de 10º ano. Excecionalmente lecionei uma aula numa turma de 7º ano do professor Ivo Brilhante que gentilmente se prontificou a ceder para que durante a minha aprendizagem tivesse contacto com dois níveis diferentes de ensino.

Com o presente trabalho pretendo descrever o trabalho por mim realizado no decorrer do estágio pedagógico.

1.1 - IDEIAS E EXPETATIVAS PARA O ESTÁGIO

Após quatro anos como diretora de uma creche em Lisboa, da qual também sou proprietária, nove anos no Ensino Superior a lecionar Estatística, um Mestrado em Ciências Estatísticas e uma licenciatura em Matemática Aplicada decidi abraçar um novo projeto comprometendo-me com o Mestrado em Ensino da Matemática da FCT-UNL.

De facto, a minha experiência como docente e a realização pessoal que sentia levou-me a decidir abraçar este projeto com determinação, mas também com algumas dúvidas e angústias.

Uma das minhas maiores preocupações e receios ao iniciar o estágio pedagógico, era o tão noticiado problema de indisciplina dos alunos, problema esse que sempre me tinha impedido de optar por lecionar no ensino Básico e Secundário.

Paralelamente a esta questão e numa perspetiva mais pedagógica outras preocupações mereciam a minha atenção.

Poder contribuir para uma aprendizagem mais prazerosa da Matemática por parte dos alunos, quer com as aulas lecionadas por mim quer com ideias e propostas apresentadas durante as minhas longas e proveitosas seções de trabalho com a Professora Teresa de Brito. Para mim a conceção de ensino/aprendizagem apenas pode ter significado se além de compreenderem, os alunos gostarem do que estão a aprender. Nessa perspetiva, uma das minhas preocupações constantes é o de proporcionar aos alunos atividades ricas, motivadoras e desafiantes que envolvam os alunos e lhes permitam aprender a gostar de Matemática

Outra preocupação é o cuidado com o rigor pedagógico/cientifico das minhas intervenções. Sendo eu uma pessoa que se importa com a excelência seja a nível profissional, pessoal e social preocupei-me em conseguir manter essa excelência durante todo o estágio pedagógico. Tenho perfeita noção que nem sempre o consegui, mas felizmente ao longo de todo o estágio tive uma excelente orientadora no que toca ao rigor pedagógico e cientifico que muito me ensinou e que de futuro me servirá com toda a certeza de modelo.

No que diz respeito ao relacionamento com os alunos, e apesar de me assustar a parte da indisciplina, tinha ideias já pré-concebidas relativamente ao papel do professor na vida de um aluno. Para mim o professor desempenha inúmeros papéis quando leciona estes graus de ensino. Ao longo da sua vida profissional o professor assume um importante papel de educador, com um papel interventivo e fundamental no crescimento dos alunos quer a nível da sua maturidade de competências científicas, mas também a nível pessoal, social e afetiva. Durante a minha experiência profissional como docente, foi esta a posição que mantive apesar de existirem diferenças a nível de relacionamento professor/aluno, pois os níveis etários são outros.

2 - A ESCOLA SECUNDÁRIA JORGE PEIXINHO

Figura 1 - Escola Secundária Jorge Peixinho

O meu estágio pedagógico decorreu na Escola Secundária Jorge Peixinho no concelho do Montijo, distrito de Setúbal.

A Escola Secundária Jorge Peixinho defende uma prática pedagógica que coloca o aluno no centro das aprendizagens, tendo como lema pedagógico "Queremos uma escola centrada nas pessoas, orientada para o sucesso, projetada para o futuro sem relegar o passado".

A escola situa-se num edifício construído em 1963 e mais tarde ampliado e requalificado. Foi fundada em 1957 como Escola Industrial e Comercial. Sendo até 1986 a única escola secundária do concelho teve um papel de relevo, quer na formação profissional dos jovens da região e na sua inserção na vida ativa, quer no complemento de formação de adultos que frequentavam o ensino noturno.

Como consequência das reformas introduzidas no sistema educativo, após 1974, este estabelecimento de ensino teve a designação de Escola Polivalente do Montijo e de Escola Secundária do Montijo. Com a criação de uma nova escola secundária no concelho, em 1986, passou-se a designar Escola Secundária nº1 do Montijo.

Durante o ano letivo de 1996/1997, o Conselho Pedagógico da escola escolheu como patrono da mesma o Maestro Jorge Peixinho, natural do Montijo, como homenagem à personalidade, dando o seu nome à escola. Essa proposta foi aprovada pelo Ministério da Educação, em julho de 1998, pelo que a escola passou a designar-se Escola Secundária Jorge Peixinho (ESJP). A Escola Secundária Jorge Peixinho encontra-se integrada no projeto de intervenção da Parque Escolar, presentemente ainda em curso. Uma vez que a renovação da Escola ainda se encontra na 2.ªfase não é possível explicitar todos os recursos e espaços físicos em pleno funcionamento.

2.1 - RECURSOS FÍSICOS

Assim, segundo o Projeto Educativo (2009-2013) da ESJP e o projeto arquitetónico previsto, no final da intervenção da Parque Escolar, a ESJP terá como instalações físicas:

- 46 Salas de aula normais;
- 6 Salas específicas TIC;
- 6 Laboratórios;
- 9 Salas e Oficinas para Artes e Expressões;
- 4 Espaços oficinais;
- Espaço desportivo coberto;
- Centro de Novas Oportunidades;
- 53 Postos de trabalho para professores;
- 2 Salas de reuniões para pequenos grupos;
- 1 Biblioteca Escolar;
- 1 Auditório;
- Área social para alunos;
- 1 Sala de professores;
- Área com 4 salas para Apoio-Educativo;
- Área de 4 salas para a direção;
- Área para Pais e Encarregados de Educação;
- 12 Salas para uso dos Serviços de Administração Escolar.

2.2 - ÓRGÃOS DE ADMINISTRAÇÃO E GESTÃO

No que diz respeito à estrutura hierárquica da Escola Secundária Jorge Peixinho esta é definida pelo seguinte organograma:

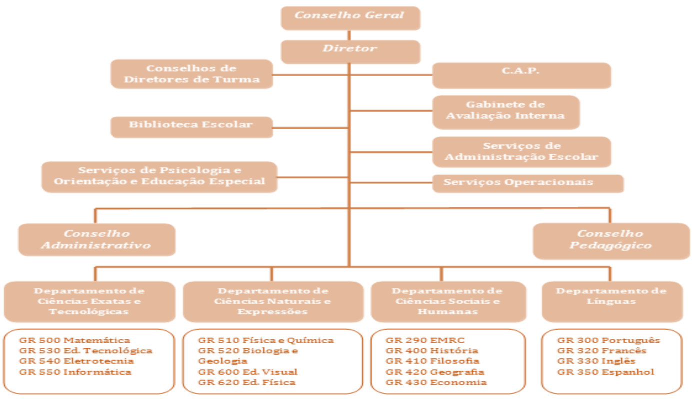


Figura 2 - Organograma da estrutura hierárquica da ESJP

2.3 - OFERTA FORMATIVA

A Escola Secundária Jorge Peixinho tem uma oferta formativa muito diversificada pretendendo "assegurar a todos o desenvolvimento das suas competências essenciais e estruturantes" (Escola Secundária Jorge Peixinho [ESJP], 2011, p. 7). Assim, a Escola Secundária Jorge Peixinho possui a seguinte oferta formativa:

- 3º Ciclo do Ensino Básico;
- Cursos de Educação e Formação (CEF);
- Cursos de Educação e Formação de Adultos (EFA - Básico e Secundário);
- Cursos Científico Humanísticos do Ensino Secundário:
    - Ciências e Tecnologias;
    - Ciências Socioeconómicas;
    - Línguas e Humanidades;
    - Artes Visuais.
- Cursos Profissionais do Ensino Secundário;
- Curso de Ciências Sociais e Humanas do Ensino Recorrente (em conclusão).

Para além da oferta formativa, existe todo um conjunto de atividades e projetos em diversas áreas na Escola Secundária Jorge Peixinho, nomeadamente (Projeto Educativo, 2009-2013):

- Desporto Escolar;
- Projeto Eco-Escolas;
- Projeto Sala de Estudo;
- Projeto Sala de Alunos;
- Projeto Laboratório de Matemática;
- Projeto Laboratório de Geometria Descritiva;
- Projeto Palma – Clube de Teatro da Escola Secundária Jorge Peixinho;
- Projeto Rádio-Escola;
- Projeto Diálogos;
- Projeto A Escola e as Famílias;
- PES – Promoção e Educação para a Saúde;
- Clube de Cerâmica;
- Clube Europeu;
- Clube de Fotografia;
- Clube Descobre;
- Clube de Karting.

2.4 - CORPO DOCENTE

Segundo os serviços administrativos, durante o ano letivo de 2014/2015 a escola possui um total de cento e trinta e nove professores, distribuídos do seguinte modo:

Tabela 1 - Dados do corpo docente

Professor do Quadro de Nomeação Definitiva	Professor do Quadro de Zona	Professores contratados
107	12	20

2.5 - O CORPO NÃO-DOCENTE

O corpo não-docente no ano letivo de 2014/2015 é constituído por um total de trinta e cinco profissionais segundo os serviços administrativos da instituição. Os funcionários não docentes encontram-se distribuídos segundo a tabela seguinte:

Tabela 2 - Dados do corpo não-docente

Técnicos Superiores	Técnicos Assistentes	Assistentes Operacionais
2	10	13

2.6 - CORPO DISCENTE

Segundo os serviços administrativos, durante o ano letivo de 2014/2015 a instituição tem um total de mil quatrocentos e trinta e dois alunos, distribuídos segundo níveis, ensino diurno e noturno e cursos constituintes da Oferta Formativa.

Tabela 3 - Alunos do ensino diurno

Ensino	Regular	Cursos de Educação e Formação de jovens (CEF)	Profissional	Total
Básico	636 alunos 25 turmas	75 alunos 3 turmas		711 alunos 28 turmas
Secundário	555 alunos 20 turmas		73 alunos 3 turmas	628 alunos 23 turmas
Total	1191 alunos 45 turmas	75 alunos 3 turmas	73 alunos 3 turmas	1339 alunos 51 turmas

No ensino noturno, a Escola Secundária Jorge Peixinho oferece cursos de Educação e Formação de Adultos (EFA):

Tabela 4 - Alunos do ensino noturno

Ensino	EFA
Básico (1º ano)	21 alunos
Secundário (1º ano)	37 alunos
Dupla Certificação (º ano)	35 alunos
Total	95 alunos

2.7 - A MINHA ORIENTADORA MARIA TERESA DE BRITO

No dia 24 de julho fui à escola pela primeira vez conhecer a escola e a minha orientadora de estágio, a Professora Maria Teresa de Brito. Nesse primeiro encontro estava naturalmente ansiosa e um pouco nervosa, pois era o primeiro contacto com uma realidade que eu temia e ao mesmo tempo ansiava por pertencer.

A Professora Teresa de Brito recebeu-me com muita simpatia, amabilidade e compreensão. Antes da nossa reunião a minha orientadora apresentou-me à Direção e secretaria que me receberam com muita simpatia e amabilidade.

Já sozinhas deu-me a conhecer os projetos abraçados por ela como docente e aos quais eu iria estar intimamente ligada. Ainda nessa reunião falámos um pouco sobre o ano letivo que se avizinhava. Depois desta reunião senti-me mais tranquila porque a disponibilidade para me orientar e me acompanhar da Professora Teresa de Brito fez-me perceber que iria ser um ano trabalhoso, mas muito proveitoso quer a nível profissional quer mesmo a nível pessoal.

No dia 15 de setembro começou finalmente o meu estágio pedagógico. Ao chegar à escola reuni-me com a Professora Teresa de Brito tal como tínhamos combinado em julho. Nessa primeira reunião de orientação de estágio, a Professora Teresa de Brito entregou-me o calendário escolar 2014/2015, o seu horário e combinámos qual seria o meu horário. Também me deu a conhecer os documentos reguladores da escola, o Projeto Educativo 2013/2017 que tem como lema "centrada nas pessoas, orientada para o sucesso, projetada para o futuro, sem relegar o passado", o Regulamento Interno, o Regimento do Departamento de Ciências Exatas e Tecnologias, o Regimento do grupo 500, as planificações a longo e médio prazo da disciplina de Matemática A do 10º e 11ºano para o ano letivo 2014/2015. Assim como me deu a conhecer as atividades do grupo 500 e o projeto "A escola e as famílias" cujo objetivo é aumentar a participação das famílias dos alunos no dia-a-dia da escola. Ainda nessa reunião combinámos quais as atividades que iriam ser dinamizadas nesse projeto.

3 - A TURMA DE LECIONAÇÃO

3.1 - CARACTERIZAÇÃO DA TURMA C DO 10.º ANO

Foi na turma C do 10º ano que tive o prazer de voltar a lecionar. No início do 1.º período de 2014/2015, a turma era composta por vinte e seis alunos, doze rapazes e catorze raparigas. O delegado de turma é o João e a subdelegada é a Vânia.

Durante o 1.º período, duas alunas pediram a transferência para outra escola, duas alunas pediram transferência para outra turma e um aluno terá realizado a anulação da matrícula desta disciplina. Assim sendo, no início do 2.º período a turma ficou reduzida a vinte e um alunos, onze rapazes e dez raparigas.

No início do ano letivo as idades dos alunos estavam compreendidas entre os 15 e os 17 anos (figura3). Relativamente ao seu passado escolar, apenas dois alunos têm retenções e são referentes ao 10.º ano de escolaridade, pelo que a idade dos alunos corresponde à idade habitual de frequência deste ano de escolaridade como podemos observar no gráfico da figura 3.

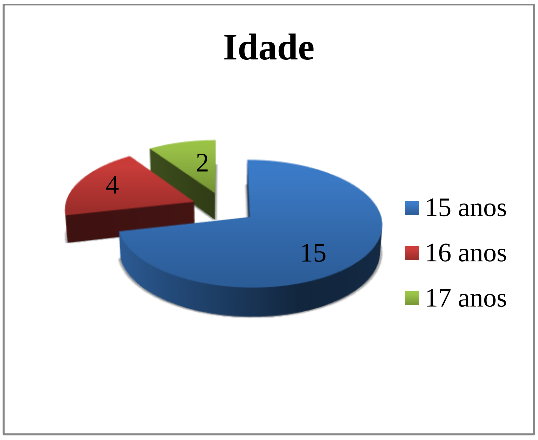


Figura 3 - Idades dos alunos

No que concerne ao aproveitamento escolar no 10º ano de escolaridade, constatou-se que apenas dois alunos da totalidade da turma são repetentes do 3.º ciclo, o que permite afirmar-se que 100% dos alunos transitou do 3º ciclo para ensino Secundário pela primeira vez

No início do ano letivo, os alunos preencheram a ficha informativa adotada na escola, que solicita dados biográficos, dados do encarregado de educação e informações sobre composição do agregado familiar, e formula questões gerais relativamente às disciplinas. Quatro alunos referiram a disciplina de Matemática como disciplina preferida e dois indicaram-na como a disciplina que menos gostam (figura 4).

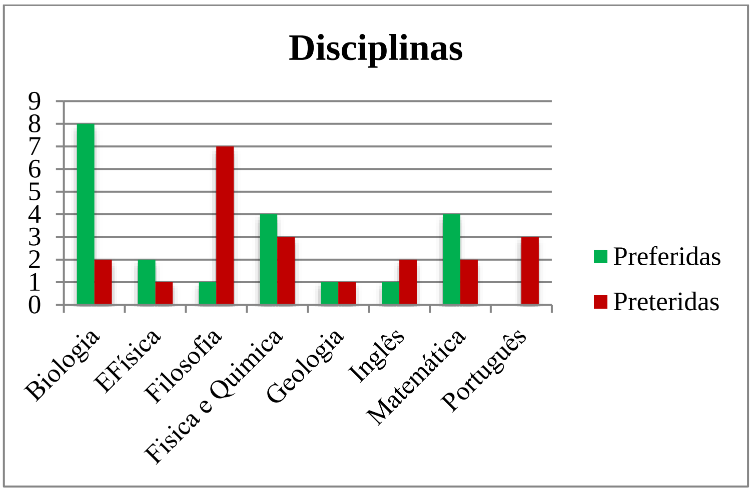


Figura 4 - Disciplinas preferidas

Relativamente à ambição de prosseguir os estudos depois de terminar o Ensino Secundário, apenas dois alunos não pretendem ingressar no ensino Superior (figura 5).

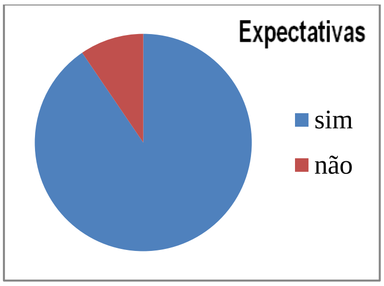


Figura 5 - Expectativas para o futuro

Quanto à vida profissional futura, indicam como profissões desejadas: enfermeiro(a), farmacêutico(a), médico(a), informático(a), professor(a), técnico (a)forense, engenheiro (a) zootécnico (a), técnico(a) de saúde como se pode observar no gráfico da figura 6:

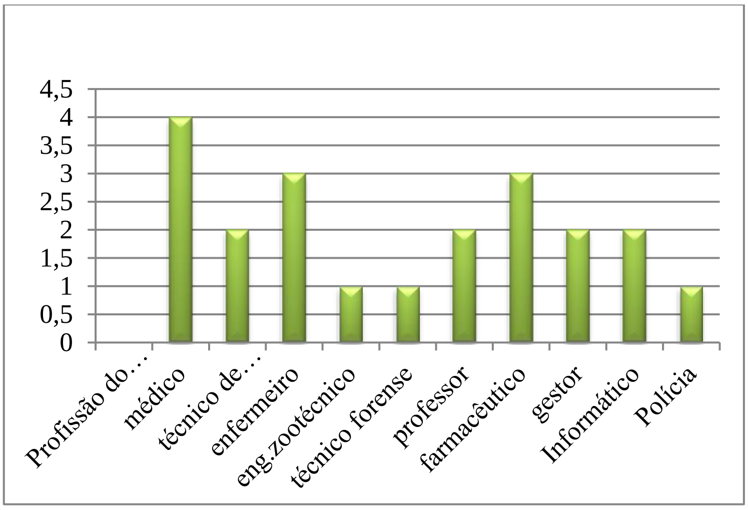


Figura 6 – Profissões ambicionadas para o futuro

Quando inquiridos acerca das suas preferências relativamente ao tipo de atividades preferidas em sala de aula, os alunos destacam o trabalho de pares, tal como se pode constatar no gráfico da figura 7.

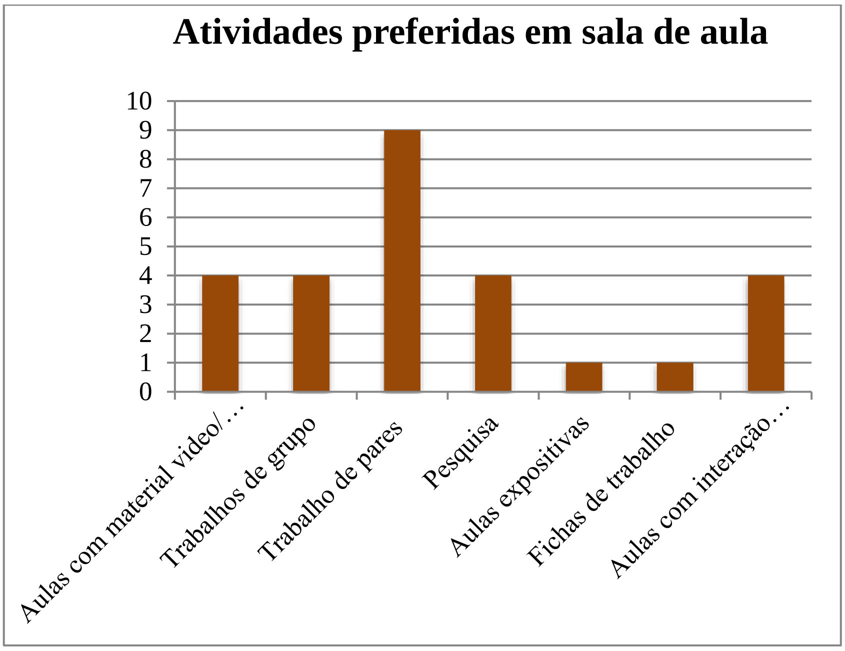


Figura 7 – Atividades preferidas em sala de aula

As habilitações dos pais dos alunos da turma situam-se entre o 9ºano e o ensino superior. A maioria dos pais possuem, pelo menos, o 12.º ano de escolaridade e metade das mães têm licenciatura ou mais havendo um pai com doutoramento como se pode observar no gráfico da figura 8.

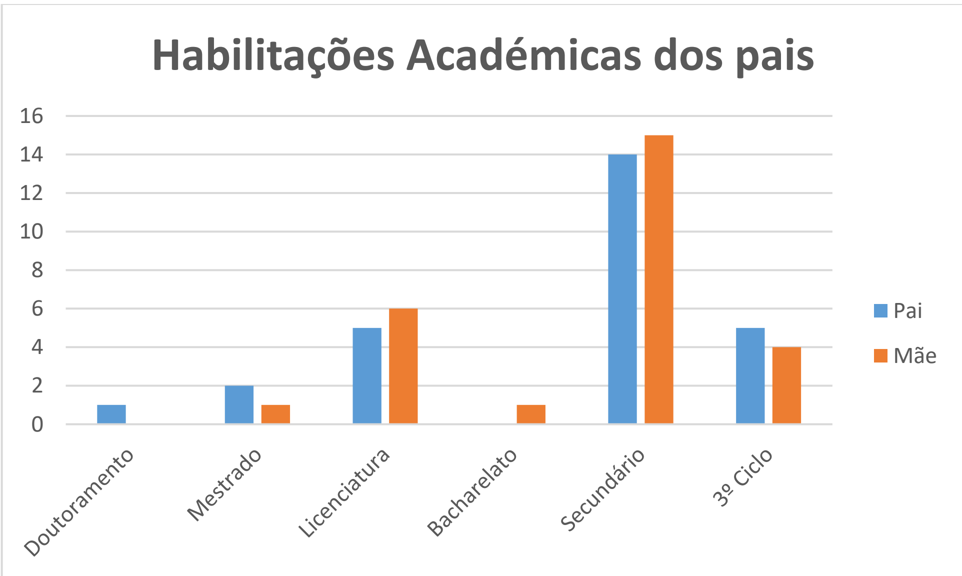


Figura 8 – Habilitações académicas dos pais

Uma elevada percentagem de encarregados de educação costuma participar nas reuniões convocadas pelo diretor de turma e, normalmente, os que são convocados na hora de atendimento também comparecem. Outros, porém, por iniciativa pessoal, contactam o diretor de turma. São, portanto, encarregados de educação preocupados e costumam acompanhar os seus educandos no processo educativo.

Com o decorrer do ano letivo, começou-se a perceber a existência de três grupos distintos de alunos. Num dos grupos temos os alunos com avaliações boas (principalmente considerando a média da turma) e com uma participação oral acima da média. Noutro grupo podemos incluir os alunos inconstantes nas avaliações e com algumas dificuldades de aprendizagem, mas muito interessados. Por fim temos o último grupo que inclui os alunos com avaliações baixas sem ser negativas, mas desinteressados e os alunos com negativas. No decorrer do segundo período foi notória a falta de motivação e de estudo de alguns alunos da turma apesar dos esforços feitos pela professora e por mim para os motivar e ajudar a ultrapassar eventuais dificuldades.

A nível comportamental estes alunos apenas apresentavam um comportamento sem nada a reportar nas aulas de Matemática. Foi com imensa surpresa que eu e a Professora Teresa de Brito fomos confrontadas com imensas queixas dos outros professores da turma no primeiro Conselho de Turma. Este facto apenas veio confirmar que o rigor e a firmeza da Professora Teresa de Brito perante a turma é um modelo a seguir. Na realidade, a Professora Teresa de Brito tem uma forma muito própria de se relacionar com as suas turmas: é austera e rígida, mas sempre com uma preocupação visível em conseguir transmitir aos alunos de forma eficaz os conteúdos. Durante as aulas existem sempre uns momentos para descomprimir que ajudam a quebrar, por momentos, o ambiente de rigor que se assiste sempre na sala de aula.

Esta turma foi uma agradável surpresa, ajudaram-me a desmistificar alguns dos meus medos, os alunos do 10º ano, turma C sempre se mostraram muito simpáticos, respeitadores e cordiais.

3.2 - MANUAIS ESCOLARES ADOTADOS

O manual escolar adotado pelo grupo de professores de Matemática da ESJP no ano letivo de 2014/2015 para as turmas do 10º ano de escolaridade foi o “Novo Espaço 10” da autoria de Belmiro Costa e Ermelinda Rodrigues, da editora Porto.

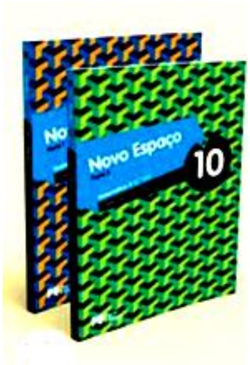


Figura 9 - Manuais adotados

Os manuais adotados são divididos em três volumes, sendo que um deles consiste num caderno de exercícios e tarefas de aplicação. São manuais que seguem, regra geral, de modo bastante rigoroso e completo, o programa oficial de matemática.

São manuais bastante rigorosos e organizados quer a nível dos conteúdos teóricos referentes ao programa oficial de matemática quer a nível dos exercícios de aplicação. As tarefas que apresentam são bastante completas e permitem ao aluno uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos.

4 - NÚCLEO DE ESTÁGIO

O núcleo de estágio era composto apenas por mim estagiária, e pela orientadora Professora Maria Teresa de Brito.

Desde o início, a minha orientadora fomentou um ambiente sincero e agradável entre nós, proporcionando um "à vontade" que permitia uma "troca" de ideias, um diálogo sincero e aberto, sempre muito proveitoso. A sua disponibilidade para ensinar e o seu rigor esteve sempre presente qualquer que fosse o assunto a ser tratado.

Era nas reuniões de estágio, que decorriam às segundas e terças das 10h10m às 11h50m, que se tratava de todos os assuntos dos trabalhos realizados ou por realizar quer fossem relacionados com o projeto "A Escola e a Família", quer fossem as planificações das aulas e materiais desenvolvidos, elaboração e correção de testes, elaboração das matrizes, critérios de classificação dos testes e apreciação das aulas assistidas feita pela Professora Teresa Brito.

Durante o 1.º período analisei, em conjunto com a orientadora, o atual programa do Ensino Básico mais concretamente 7.º ano. Foram analisadas propostas de atividades por mim elaboradas, nos domínios da Geometria e Funções.

Como a orientadora desempenhou funções de DT, participei nas atividades burocráticas inerentes ao cargo.

Apesar do muito trabalho a desenvolver a Professora Teresa de Brito mostrou-se sempre empenhada para que adquirisse o melhor conhecimento sobre todos os assuntos que envolvem a escola e todo o rigor e conhecimento que um professor tem que possuir. Como estagiária procurei corresponder a todas as suas expetativas com dedicação, empenho e esforço nas atividades propostas. Este trabalho constituiu, na minha opinião, um bom exemplo do que deve consistir um trabalho colaborativo entre docentes da mesma área disciplinar. Um modelo a perpetuar no decurso da minha futura carreira docente.

4.1 - PROJETO "A ESCOLA E AS FAMÍLAS"

Figura 10 - Logotipo do Projeto "A Escola e as Famílias"

Numa sociedade globalizada onde os pais passam mais de dez horas longe dos filhos sendo obrigados a deixá-los sozinhos e entregues a si próprios, a escola é cada vez mais um porto de abrigo para grande parte dos estudantes.

Nos últimos anos tem-se sentido uma necessidade crescente de a escola e os professores assumirem também um papel de educadores. Hoje em dia, o professor além de ensinar os conhecimentos técnicos da sua área disciplinar, vêm-se confrontados com o facto de terem que participar na educação pessoal, emotiva e social dos seus discentes.

Há por isso uma necessidade crescente por parte das escolas em chamar os pais à escola!

O Projeto "A Escola e as Famílias" foi implementado na Escola Secundária Jorge Peixinho no ano letivo 2008/2009, sob a orientação da professora Maria Teresa de Brito em conjunto com uma colega da área de Biologia. O projeto, hoje, encontra-se sob a coordenação da professora Maria Teresa de Brito e da Professora Manuela Afonso.

Como objetivo nuclear o projeto visa aumentar a participação das Famílias na escola. O projeto tem como objetos gerais:

- Proporcionar fatores de motivação para favorecer o sucesso educativo;
- Contribuir para a formação pessoal e social dos alunos;
- Fomentar o intercâmbio entre alunos/pais e escola;
- Envolver as famílias em atividades de aprendizagem em casa;

No início do ano letivo 2014/2015 foram aferidas as atividades a realizar e as datas da sua realização, tendo em conta os objetivos referidos anteriormente e que estão na base deste projeto. As atividades propostas foram divulgadas na plataforma moodle:

- Realização de campanhas de solidariedade e de recolha de tampas de plástico, com o objetivo de apoiar instituições de solidariedade;
- Serão Matemático;
- Gabinete de apoio às Famílias das turmas 7.ºA e B e 8.º C;
- Projeto Segurança e Saúde.

A campanha de solidariedade, de angariação de bens alimentares e vestuário, decorreu na época de Natal e foi bastante positiva. Este ano, devido à conjetura atual, e às crescentes dificuldades das famílias optou-se por doar os bens angariados a alunos carenciados da escola.

Figura 11 - Espaço para recolha de bens para alunas da ESJP

A campanha “Tampinhas” decorreu ao longo do ano letivo e teve uma grande adesão. Este ano parte das tampinhas recolhidas foram entregues à Cercima e outra parte a uma menina, do distrito de Setúbal, como forma de pagamento dos seus tratamentos de fisioterapia.

Figura 12 - Espaço para recolha de tampinhas

Apesar de não ser a primeira vez que participo em campanhas deste tipo considero-as sempre muito importantes para o meu desenvolvimento pessoal e contribuem em muito para aumentar a minha convicção que ser professor é muito mais do que ensinar determinados conteúdos e avaliar. Para mim, é muito importante esta vertente social e pessoal.

Este ano, o serão matemático foi um espaço cujo objetivo foi proporcionar um momento de partilha matemática entre pais e filhos através de um problema disponibilizado na plataforma mensalmente.

No Projeto Segurança e Saúde, foram elaborados documentos sobre “Ruído”, “Tabagismo” e “Radiações ultravioletas” disponibilizados aos pais das turmas A e B do 7.º ano e turma C do 8.º ano, na plataforma moodle. Foi proposto a realização de trabalhos sobre estes temas de modo a que os pais pudessem apresentar num Workshop a realizar no 3.º período. Por motivos profissionais, os pais apenas elaboraram trabalhos que foram expostos durante a semana do Departamento das Ciências Exatas e Tecnológicas.

Figura 13 - Exposição dos trabalhos

4.2 - REUNIÕES

As reuniões são outro dos procedimentos inerentes à vida docente, assim sendo fizeram parte do meu estágio.

Estive presente em todos os conselhos de turma, da turma C do 10º ano de escolaridade. Nessas reuniões, todos os professores da turma estão presentes e discutem estratégias no sentido de melhorar o desempenho dos alunos quer seja a nível escolar quer seja a nível pessoal e social.

Um dos aspetos que mais me surpreendeu nestas reuniões foi o empenho de todos os professores em encontrar estratégias para melhorar o aproveitamento de todos os alunos.

No entanto, houve um pormenor que foi uma verdadeira surpresa positiva para mim, a presença dos representantes de pais, delegado e subdelegado dos alunos de turma nas reuniões de final de período. Penso que a presença de representantes de pais e alunos é importante porque incentiva o binómio Família-Escola, permitindo aos pais estarem mais conscientes da vida escolar dos filhos, vida essa que de outra forma não conhecem, de exporem os seus receios e dúvidas acerca dos seus educandos aos professores. Por outro lado, permite aos alunos (ou pelo menos aos seus representantes) ouvirem o que os professores têm a dizer da turma, e conseguirem ou pelo menos tentarem tomar consciência das opiniões dos professores.

4.3 - OBSERVAÇÃO DO TRABALHO DA ORIENTADORA

Ao ter conhecimento, no primeiro ano do mestrado, de parte do meu horário seria a observar aulas confesso que fiquei desapontada e a pensar: mas o que vou aprender sentada a ouvir “a” orientadora?

Ao conhecer a Professora Teresa de Brito e ao assistir à sua primeira aula, toda a minha deceção e dúvidas "caíram por terra"! nessa primeira aula consegui logo perceber o quanto iria aprender, e quanto iria ser enriquecedor ter a Professora Teresa de Brito como minha orientadora!

A observação do trabalho da minha orientadora foi, na minha opinião, a parte mais importante do meu estágio. Apesar de já ter experiência a lecionar, o facto de ter sido na faculdade não me permitiu ter contacto com pormenores muito importantes para o ensino Básico e Secundário. Com a Professora Teresa de Brito tive consciência e percebi o que é ser Professor!

A observação assentou no seu trabalho letivo, na gestão da aula, na relação com os alunos e na sua participação na vida escolar.

Relativamente ao trabalho letivo é de valorizar o rigor cientifico com que leciona as aulas. As aulas são, sem exceção, todas preparadas ao pormenor e com alguma antecedência, nenhum detalhe é esquecido! Em sala de aula recorre a diversas estratégias para resolver exercícios chamando sempre a atenção para diferentes formas de raciocinar, o que permite aos alunos verem a matemática como a própria Professora Teresa de Brito a vê, como uma Ciência e não um receituário.

Esse mesmo rigor é também aplicado a todos os instrumentos de avaliação, quer sejam fichas ou testes. Estes são sempre preparados com muita antecedência e muito rigor. A sua correção é sempre feita antes de ser entregue, quer seja aos alunos, quer seja aos seus colegas de trabalho. Em relação aos testes houve muitos pormenores que considerei interessantes e que demonstram a sua preocupação com os alunos. Ao elaborar as questões dos instrumentos de avaliação a Professora Teresa de Brito preocupa-se em não colocar questões que dependam da anterior. Outro pormenor prende-se com a "forma" como corrige os testes. Não há nada que a Professora Teresa de Brito não valorize na resolução de um exercício, valoriza tudo o que o aluno responde mesmo que não tenha conseguido alcançar a resposta correta. Confesso que aprendi muito na elaboração e correção de testes com a minha orientadora Professora Maria Teresa de Brito.

Em relação aos alunos é uma Professora dedicada e atenta que se preocupa não só com o seu sucesso académico, mas também com o seu desenvolvimento pessoal e futuro. É muito comum assistirmos, em sala de aula, a Professora Teresa de Brito a alertar um ou mais alunos para comportamentos menos corretos ou menos próprios a ter, recorrendo sempre à analogia de uma vida futura, num emprego..., contudo e apesar de todo o rigor mantido em sala de aula há sempre lugar a uns momentos de descontração onde é muito comum vermos todos, alunos e Professora bem dispostos. Outro ponto a apontar que se pode observar nas aulas da Professora Teresa de Brito é o sentido de responsabilidade que ela tenta incutir aos alunos.

A sua preocupação com o Projeto “A Escola e as Famílias” ficou logo patente no nosso primeiro encontro. Tal como é seu hábito, todos os projetos a que nos propusemos no início do ano letivo foram planificados e acompanhados sempre com rigor.

Por último, quero realçar a sua constante preocupação e dedicação em relação a todo o meu trabalho e a toda a minha aprendizagem. O seu empenho, rigor e dedicação enriqueceu de um modo especial a minha vida profissional e pessoal e espero no futuro poder ensinar tudo aquilo que aprendi com a minha orientadora Professora Maria Teresa de Brito.

4.4 - PRÁTICA PEDAGÓGICA

No domínio da minha prática pedagógica e no decorrer do estágio pedagógico, o meu trabalho consistiu em:

- Planificar e lecionar aulas, que envolveram, quando necessário, elaboração de material de apoio como fichas de trabalho, slides e outros.
- Participar no trabalho inerente aos instrumentos de avaliação quer seja na conceção de alguns exercícios, quer seja na sua correção, classificação e elaboração das matrizes.
- Colaborar na avaliação dos alunos
- Participar e apoiar na direção turma

A participação e apoio na direção de turma, a participação no trabalho relativo aos testes sumativos decorreu de forma contínua e regular durante todo o ano letivo e por essa razão não forma especificados no calendário apresentado.

5 - PRÁTICA LETIVA

Neste capítulo irei abordar todas as atividades desenvolvidas no estágio pedagógico. Como orientadora de estágio a Professora Maria Teresa de Brito proporcionou uma experiência muito rica e fundamental para a minha formação como professora.

Tal como já referi, todas as semanas, nas duas reuniões realizadas na componente não letiva do horário de orientadora, eu e a Professora Teresa de Brito realizávamos, com antecedência, a planificação e preparação de todos os materiais necessários à lecionação das aulas. Tratando-se das aulas lecionadas por mim, as planificações, tarefas, exercícios e fichas eram preparadas e analisadas exaustivamente.

Sempre que possível e adequado recorreu-se à utilização das novas tecnologias com o objetivo de dinamizar e valorizar os conteúdos lecionados, auxiliando os alunos na sua aprendizagem.

A referir que após cada aula que lecionei foi feita uma pequena reunião onde a Professora Teresa de Brito fazia um pequeno balanço, referindo os aspetos positivos e negativos, aconselhando-me sempre com estratégias para melhorar a minha prática letiva, inclusive no sentido de ser meticulosa e transmitir os conteúdos com o rigor que a disciplina de Matemática exige.

Todos os materiais elaborados encontram-se disponíveis no dossiê de estágio.

5.1 - PRÁTICA PEDAGÓGICA SUPERVISIONADA

Neste estágio, as aulas que lecionei foram na turma C do 10.º ano e excecionalmente uma numa turma do 7.º ano do Professor Ivo Brilhante, tal como referido anteriormente.

1.º Período

O primeiro período foi de extrema importância. Foi neste período que comecei a conhecer e interagir com os alunos da turma cooperante. Nos primeiros dias a minha participação era apenas como observadora, começando aos poucos a ser chamada pela Professora Teresa de Brito para verificação dos trabalhos de casa.

A primeira aula lecionada foi no dia 9 de outubro de 2014 e teve como objetivo a resolução de um problema do manual adotado, com vista a rever conteúdos aprendidos no 3.º ciclo do Ensino Básico.

De acordo com o que foi estipulado nas reuniões de orientação de estágio, planifiquei e lecionei no 1.º período, dez aulas inseridas na unidade curricular designada Geometria no Plano e Espaço 1.

Os conteúdos lecionados encontram-se sintetizadas no quadro seguinte:

Tabela 5- Quadro síntese das aulas lecionadas no 1.º período

Lição	Sumário
n.º 23, 24	Resolução de um problema que envolve critérios de paralelismo e de perpendicularidade de retas e planos, semelhança de triângulos e determinação de áreas de polígonos e volumes de sólidos.
n.º 37, 38	Bissetrizes dos quadrantes ímpares e dos quadrantes pares. Semiplanos. Resolução de exercícios
n.º 39, 40	Conjuntos definidos por conjunções e disjunções de condições em $\mathcal{R}^2$. Negação de condições. Resolução de exercícios
n.º 41, 42	Primeiras leis de De Morgan. Resolução de exercícios.
n.º 59, 60	Mediatriz de um segmento de reta. Resolução de uma ficha de trabalho e de exercícios propostos.

Tal como já referi, no 1.º período lecionei excecionalmente uma aula numa turma do 7.ºano inserida no domínio das Funções. A aula lecionada encontra-se sintetizada no quadro que se segue:

Tabela 6- Quadro síntese da aula lecionada no 7.º ano

Lição	Sumário
3 de dezembro	Referencial cartesiano. Representação de pontos no plano. Resolução de exercícios.

Os planos de aula e material de apoio podem ser consultados no dossiê de estágio.

2.º Período

Após o impacto das primeiras aulas lecionadas, chegou o 2.º período. Este período foi um pouco atribulado a nível pessoal e por essa razão, apenas consegui planificar e lecionar dez aulas, inseridas na unidade curricular designada por Funções e Gráficos, com os temas: Função Quadrática, Função Módulo, Inequações do 2.º grau e Função Polinomial. As aulas lecionadas encontram-se sintetizadas no quadro seguinte:

Tabela 7-Quadro síntese das aulas lecionadas no 2.º período

Lição	Sumário
n.º 97, 98	Resolução da tarefa "Investigando a função quadrática" com elaboração de um relatório.
n.º 105, 106	Resolução de inequações do 2ºgrau. Resolução de exercícios
n.º 107, 108	Resolução da tarefa "Investigando a função módulo" com elaboração de um relatório.

n.º 123, 124	Polinómios. Resolução de uma ficha de trabalho. Operações com polinómios.
n.º 125, 126	Método dos coeficiente indeterminados. Regra de Ruffini. Teorema do resto.

Os planos de aula e material de apoio podem ser consultados no dossiê de estágio.

3.º Período

Ultrapassadas as minhas limitações físicas, no 3.º período planeei e lecionei treze aulas de 90 minutos e uma de 45 minutos, duas das quais inseridas na unidade curricular Funções e Gráficos, com o tema Função Polinomial e nove aulas de 90 minutos e uma de 45 minutos inseridas na unidade curricular de Estatística. O quadro seguinte discrimina as aulas lecionadas:

Tabela 8 -Quadro síntese das aulas lecionadas no 3.º período

Lição	**Sumário**
n.º 141, 142	Resolução da tarefa "Às voltas com as funções polinomiais" com elaboração de um relatório
n.º 143, 144	Continuação de resolução da tarefa "Às voltas com as funções polinomiais"
n.º 146	Visualização de um vídeo "O que é Estatística". Discussão sobre os temas abordados no vídeo
n.º 147, 148	Conceitos básicos de Estatística: Estatística, população, amostra, sondagem, censos, amostra aleatória, amostras enviesadas Visualização de um video acerca da amostragem aleatória. Realização de uma ficha acerca do uso indevido da Estatística.
n.º 149, 150	Definição de variável qualitativa e variável quantitativa discreta e contínua. Organização e interpretação de dados discretos. Construção de tabelas de frequências de dados discretos. Definição de frequência relativa, absoluta e acumulada.
n.º 151, 152	Resolução de exercícios de consolidação. Função cumulativa.

n.º 153, 154	Medidas de localização de tendência central: média amostral, mediana, moda. Quartis.
n.º 155, 156	Propriedades da média amostral. Diagrama de extremos e quartis. Simetria da amostra. Resolução de exercícios.
n.º 157, 158	Resolução de exercícios. Dados contínuos: tabela de frequências, frequências relativas e absolutas, frequências acumuladas. Histograma e polígono de frequências.
n.º 159, 160	Medidas de localização de tendência central para dados contínuos: média, moda, mediana amostrais. Quartis amostrais de dados contínuos. Resolução de exercícios.
n.º 161, 162	Função cumulativa. Resolução de exercícios.
n.º 163, 164	Medidas de dispersão: amplitude, desvio médio, desvio padrão, variância.
n.º 165, 166	Variáveis bidimensionais
n.º 167, 168	Regressão linear. Exercícios de aplicação.

5.2 - PRÁTICA PEDAGÓGICA SEM A PRESENÇA DA ORIENTADORA

Tabela 9 -Quadro síntese das aulas lecionadas sem supervisão da orientadora

Lição	Sumário
n.º 147, 148	Conceitos básicos de Estatística: Estatística, população, amostra, sondagem, censos, amostra aleatória, amostras enviesadas Visualização de um video acerca da amostragem aleatória. Realização de uma ficha acerca do uso indevido da Estatística.

n.º 149, 150	Definição de variável qualitativa e variável quantitativa discreta e contínua. Organização e interpretação de dados discretos. Construção de tabelas de frequências de dados discretos. Definição de frequência relativa, absoluta e acumulada.
n.º 151, 152	Resolução de exercícios de consolidação. Função cumulativa.

Por impossibilidade da orientadora, que se ausentou da escola por motivos de saúde, garanti a condução das aulas nos dias 27, 29 e 30 de abril. Uma vez que as planificações são analisadas antecipadamente a Professora Teresa de Brito já tinha tido oportunidade de corrigir as planificações das aulas a lecionar nesses dias, por esse motivo as aulas decorreram de uma forma normal, comigo a lecionar os temas desta unidade curricular.

Esta oportunidade de lecionar individualmente, um grupo de aulas, revelou-se para mim uma experiência muito desafiante e enriquecedora. Com efeito, as duas primeiras aulas correram sem incidentes, no entanto, no último dia, os alunos apresentavam-se muito irrequietos e desmotivados. O nível de conversa e de distração foi mais elevado do que o normal, o empenho na resolução formal dos exercícios foi mais reduzido e verificou-se uma certa inércia na abordagem inicial das atividades propostas. No meu entender, este seu comportamento ficou a dever-se sobretudo à conjunção de duas condicionantes: a ausência da sua professora de referência e a condução das aulas por uma, no seu ponto de vista, "quase" professora. Com efeito, creio que o facto de os alunos terem conhecimento da minha condição de estagiária, lhes poderá ter induzido uma certa conceção de um ambiente de sala de aula mais descontraído e menos "a sério". O grande desafio que então se me colocou, e que não havia ainda verdadeiramente ocorrido, pela presença de algum modo protetora da orientadora, foi o de conseguir manter um bom ambiente de trabalho na sala de aula, pautado pelo interesse e pelo respeito. Este episódio não se voltou a repetir mas serviu para me aperceber de que, por vezes, é necessário tomar uma atitude mais autoritária e intransigente. Foi um dia onde senti muitas dúvidas e incertezas.

6 - REFLEXÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Ao iniciar o estágio pedagógico, e apesar de um certo à-vontade com a carreira de docente e uma verdadeira consciencialização do trabalho não letivo inerente ao trabalho docente, não possuía, à partida, a noção dos contornos da profissão a que me propunha. Não era claro para mim, o compromisso permanente inerente à vida de um docente do Ensino Básico ou Secundário, a necessidade permanente de rigor e sensibilidade perante o dia-a-dia das escolas.

Gostaria aqui de salientar a questão do rigor na linguagem corrente utilizada, para o qual não possuía tanta sensibilidade à partida e que fui progressivamente corrigindo e otimizando com a ajuda inestimável da Professora Teresa de Brito.

Neste como noutros aspetos (interação com os alunos, organização e dinamização de uma aula, atenção ao rigor científico, entre outros) creio que apresentei uma evolução global francamente positiva ao longo do estágio pedagógico.

Gostaria ainda de referir o quanto foi importante para a minha prática pedagógica e para uma maior consciencialização da minha prática letiva as aulas assistidas pela Professora Doutora Maria Helena Santos, cujas criticas sempre construtivas me ajudaram a refletir e a crescer como docente.

Um dos momentos que considero importantes, na minha formação foram as três aulas que lecionei sem a presença da Professora Teresa. Essas aulas serviram para eu tomar consciência do que é ser Professora! Nos momentos que se seguiam à aula e nos quais eu refletia acerca da minha prática pedagógica apercebi-me que as aulas nunca são iguais e que temos que nos conseguir adaptar aos incidentes que estão a decorrer no momento. Não há uma fórmula para os ultrapassar! A relação professor-aluno deverá ser um processo que se fundamenta no respeito e na amizade. O problema, por vezes, coloca-se em como conseguir atingir este tipo de ligação saudável com os alunos!

Para concluir, gostaria ainda de realçar um dos grandes ensinamentos que interiorizei com o meu estágio profissional: é de uma importância extrema que o professor se mantenha sempre atento a todos os níveis, na sala de aula, encontrando-se continuamente preparado para questionar as suas estratégias e compromissos e para encetar novos caminhos e aprendizagens, conforme isso se justifique. E esta permanente atenção e contínua evolução e aprendizagem do professor, deve ocorrer não só na fase da sua formação, como ao longo de toda a sua carreira e sempre no melhor interesse da evolução escolar e pessoal dos seus formandos.

PARTE II

1 - INTRODUÇÃO

O presente estudo está organizado em quatro capítulos, sendo este primeiro capítulo dedicado à motivação para a realização deste trabalho, à formulação dos objetivos e questões de aprendizagem e fundamentação teórica acerca da aprendizagem das funções através do ensino exploratório. No segundo capítulo é feita uma revisão bibliográfica, no terceiro apresento as opções metodológicas assim como os instrumentos de recolha de dados. O quarto capítulo foi reservado para a análise dos estudos de caso e o quinto e último capítulo apresenta as considerações finais do estudo.

1.1 - MOTIVAÇÃO

" Todos os alunos são capazes de aprender matemática"!

NCTM (2000)

Esta é uma das frases chave da reforma proposta pelo NCTM, como é referido nas suas normas,

[…] "deve ser valorizado o desenvolvimento matemático de cada criança, numa sociedade multicultural variada. Os procedimentos de avaliação não deverão continuar a ser usados de forma a negar aos alunos a oportunidade para aprender matemática."

Como se percebe, é importante que a escola em particular, e o sistema educativo em geral, criem condições para que todos os alunos tenham acesso a uma educação que lhes permita desenvolver competências indispensáveis, de modo a que sejam plenamente integrados na sociedade.

A importância do desenvolvimento de competências é referido por Ponte (2001),

[…] "na verdade, em termos de objetivos, considera-se hoje fundamental a construção do conhecimento, competências e valores que vão muito para além daquilo que se aprende por simples memorização e prática repetitiva" (p.95)

Também Roldão (2004), partilha da convicção da necessidade de adequação dos conhecimentos a situações novas:

[...] "a competência não exclui, mas exige, a apropriação sólida e ampla dos conteúdos, organizados numa síntese integradora, apropriada pelo sujeito, de modo a permitir-lhe «convocar» esse conhecimento face às diferentes

situações e contextos. A competência implica a capacidade de ajustar os saberes a cada situação – por isso eles têm de estar consolidados, integrados e portadores de mobilidade." (p.68)

Ensinar numa perspetiva do desenvolvimento de competências dos alunos vai muito além da exigência do domínio dos conteúdos programáticos, requerendo algo mais:

"Não bastará apenas que o aluno demonstre que conhece, ou memorizou, uns quantos conteúdos, respondendo a um teste ou ficha em mecanismo pergunta - resposta: ele terá de demostrar, em situação de avaliação, não só que os conhece e evoca, mas que os domina e sabe usar para alguma coisa – no plano da cognição e/da ação" (Roldão, 2004, p. 69).

Como consequência da necessidade crescente de desenvolvimento das competências dos alunos, a escola tem, obrigatoriamente, de refletir sobre as suas práticas educativas e saber em que medida é que as metodologias de ensino que utiliza são potenciadoras de tal desenvolvimento.

[...] "se pretendo que o aluno se torne competente em pensar cientificamente ou se torne capaz de analisar realidades do mundo social, terei de orientar toda a ação em aula no sentido de promover intencionalmente essa construção, o que implica sobretudo repensar metodologias de trabalho na docência" (Roldão, 2004, p. 70)

As diretivas do NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) têm vindo a ser implementadas em Portugal, o que tem implicado alterações profundas no processo de Ensino e Aprendizagem, tendo-se assistido a mudanças não só no que é ensinado como também na forma como esse ensino é feito.

No processo de aprendizagem, há alunos que privilegiam formas visuais de informação para aprenderem, outros formas verbais ou escritas. Assim sendo deverá o processo de Ensino ter em conta os diferentes estilos de aprendizagem dos alunos, devendo recorrer-se a uma variedade de técnicas, instrumentos e estratégias de avaliação, para que os alunos tenham oportunidade para demonstrar as suas competências relativamente aos múltiplos aspetos da sua aprendizagem.

O professor deverá privilegiar situações e instrumentos didáticos que favoreçam a participação ativa e construtiva do aluno em relação à sua aprendizagem escolar, ajudando-o a desenvolver capacidades de auto regulação durante a execução das suas atividades. De igual forma, o professor deve, regularmente, fornecer um *feedback* de carácter mais formativo do que avaliativo das realizações dos estudantes, dando maior ênfase aos processos intermédios relativamente aos produtos finais.

A realização de tarefas em sala de aula é uma atividade cujo papel fulcral no âmbito do ensino da Matemática ninguém discute. Quer a sua natureza, quer o modo como são realizadas, quer as ferramentas que são utilizadas são tudo aspetos relevantes para o envolvimento dos alunos no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. As tarefas devem ser o mais diversificadas possível, passando por exercícios, resolução de problemas, tarefas de exploração e investigação (Ponte, 2005) e realizadas, tanto quanto possível, em vários contextos quer de Matemática pura, quer de semi-realidade ou realidade (Skovsmose, 2000).

Na década de 80, as orientações curriculares para o ensino da Matemática começaram a privilegiar a resolução de problemas (Agenda para a Acção - NCTM, 1985), no entanto alguns documentos como o relatório Cockcroft (1982) alertam que também as tarefas de investigação são elementos essenciais no ensino da Matemática. Na Renovação do Currículo (APM, 1988), salienta-se que a mudança mais importante "não é a alteração dos conteúdos nem a introdução de novas tecnologias, mas sim a mudança profunda nos métodos de ensino, na natureza das atividades dos alunos", valorizando assim a realização de tarefas, nomeadamente a resolução de problemas como uma forma de atividade decisiva em Matemática e que deve ser utilizada para motivar atividades de exploração e investigação.

A primeira reação da maioria dos alunos quando confrontados com um problema não rotineiro é: "o que é para fazer?". Essa reação enquanto aluna de Matemática do Ensino Secundário sempre me incomodou provocando-me uma imensa vontade de ajudar a 'desmistificar´ esse 'bicho papão'. Sei hoje que essa reação surge da visão que os alunos têm da Matemática. No entender de alguns alunos, a Matemática parece ser vista como uma disciplina na qual para cada questão há um e um só procedimento a usar e uma resposta está certa ou errada, conforme o procedimento foi ou não bem escolhido e bem aplicado. Cada conteúdo aprendido tem um compartimento próprio e não existe conexão possível entre os vários compartimentos. A maioria dos alunos vêm a professora como alguém que lhes transmite uma série de regras e procedimentos matemáticos de modo a prepará-los para uma prova ou exame nacional. Muitos alunos inclusive, consideram que o importante é fazer exercícios de forma a prepará-los nesse sentido. Um pensamento comum entre alunos do 10.º e 11.º ano, pode muitas vezes ser traduzido pela afirmação: 'se não sai no exame não interessa' e portanto, tarefas que saiam dos procedimentos mecânicos e que os ajudem à abstração necessária para um Raciocínio Matemático são por vezes desvalorizados.

Durante todo o seu percurso escolar, os alunos tendem a mecanizar técnicas e procedimentos que aplicam sem compreender e sem dominarem por completo os conteúdos que estão a ser estudados. Essa realidade é transversal a todos os temas abordados na Matemática e em particular, no estudo das Funções. Como não compreendem o que estão a aplicar, quando confrontados com situações problemáticas envolvendo relações funcionais, apresentam várias dificuldades nomeadamente no estabelecimento de relações entre as diferentes formas de representação de uma função, na interpretação dos dados fornecidos pela calculadora gráfica, na interpretação de problemas contextualizados, no domínio de processos de resolução e no estabelecimento de conexões com outros conteúdos da Matemática ou de outras disciplinas. Como aluna de Matemática, sempre gostei de Álgebra e do estudo de funções. Assim, quando tive que escolher um tema para trabalhar com os alunos do 10.º ano, não tive dúvidas que deveria de ser o estudo de funções. Para esta decisão contribuiu também a opinião da minha orientadora de estágio e as orientações expressas nas Normas do NTCM que sublinham o carácter multifacetado da Álgebra, que deverá:

> *[…] "proporcionar aos alunos conhecimentos acerca das estruturas e abstrações matemáticas" (NCTM, 2007, p. 353).*

Foi neste contexto que surgiu o meu interesse em abordar o estudo das funções (funções quadráticas, funções módulo e funções polinomiais de grau superior a dois), através de um estudo exploratório com recurso a tarefas de investigação e resolução de problemas. As tarefas propostas têm como principal objetivo proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem significativas para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

1.2 - OBJETIVOS DO ESTUDO

O estudo que me proponho desenvolver tem como objetivo compreender os processos de raciocínio usados por alunos do 10.º ano, num estudo exploratório com recurso a tarefas de investigação e resolução de problemas numa unidade de ensino sobre o tópico *Funções*. Deste objetivo resultam as seguintes questões de investigação:

1. Como se carateriza a compreensão dos conceitos no estudo das funções a partir de uma abordagem centrada no ensino exploratório?
2. Como se caracterizam os raciocínios desenvolvidos pelos alunos quando envolvidos em ambientes de ensino exploratório?
3. Qual o papel das diferentes representações na aprendizagem do conceito de função?
4. Qual o papel da calculadora gráfica no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos?

Com este estudo espero contribuir para um melhor conhecimento sobre as tarefas a propor aos alunos, as suas potencialidade e dificuldades de concretização no ensino e na aprendizagem das funções, nomeadamente no que se refere ao papel de diversos tipos de tarefas no desenvolvimento e evolução do raciocínio Matemático dos alunos.

2 - RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

2.1 - UM POUCO DE HISTÓRIA

No inicio do século XX, numa Europa saída da Revolução Industrial começou a emanar por parte dos professores de matemática de muitos países uma preocupação com o ensino de Matemática.

Em 1908, essa preocupação crescente levou à criação de uma comissão internacional para analisar o ensino da Matemática em diferentes países. No IV Congresso Internacional de Matemática realizado em Roma, o matemático Félix Klein divulgou a experiência desenvolvida na Alemanha, que se encontrava dividida em estados independentes cada um com o seu sistema educacional. Esta experiência traduziu-se num movimento de professores para a modernização e unificação do ensino de Matemática no secundário conhecido como a "Meraner Reform".

Cinquenta anos depois, a experiência de Klein despoletou o nascimento de um movimento reformador para uma nova Matemática a ser ensinada nas escolas secundárias, bem como o seu desenvolvimento e especificação através do programa de Dubrovnik (Guimarães, 2007; APM, 1988). Esse movimento internacional alargou-se a muitos países e ficou conhecido como "Movimento da Matemática Moderna' (MMM).

Na sua base, a Matemática Moderna pretendia preparar os alunos de forma a que pudessem acompanhar e lidar com as tecnologias que estavam a emergir. Com esse objetivo, o MMM propunha inserir no currículo conteúdos matemáticos que até aquela época não faziam parte do programa escolar, como por exemplo, estruturas algébricas, teoria dos conjuntos, topologia ou transformações geométricas.

Em 1978, nos EUA, surge o relatório *Position Statements on Basic Skills, do National Council of Supervisors of Mathematics* (NCSM, 1978) onde a resolução de problemas aparece como a primeira das dez áreas de aptidões básicas: *[…]"aprender a resolver problemas é a principal razão para estudar Matemática"* (p. 148).

Já em 1980, surge um conjunto de recomendações para o ensino da Matemática, *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980's*, do National Council of Teachers of Mathematics, (NCTM, 1980), traduzido e publicada em Portugal cinco anos mais tarde. A importância dada pelo NCTM à integração da resolução de problemas no ensino da Matemática adquire neste documento uma posição principal sendo mesmo a primeira recomendação que se pode ler: *"A resolução de problemas seja o foco (focus) da Matemática escolar nos anos 80". (NCTM, 1980, p. 1).*

Esta mesma recomendação pode ser novamente encontrada, dez anos mais tarde, no *Curriculum and evaluation standards for school mathematics* (NCTM, 1989) constituindo mesmo uma das suas orientações centrais. Dois anos depois, numa publicação da Associação de Professores de Matemática este documento é publicado em português — *para o currículo e a avaliação em Matemática escolar* (NCTM, 1991).

A "alfabetização matemática" definida nestas normas como sendo essencialmente o desenvolvimento de aptidões no aluno que permite resolver situações problemáticas e abertas, reconhecendo a aplicabilidade e utilidade da matemática. Neste documento pode-se ler que:

> *[…] "a resolução de problemas (…) deve ser central na vida escolar, de tal modo que os alunos possam explorar, criar, adaptar-se a novas condições, e activamente criar novo conhecimento no decurso das suas vidas" (NCTM, 1991, p. 5).*

Destas normas emergem novos objetivos para o ensino da matemática, cinco competências a atingir por todos os alunos, incluindo no que se refere às capacidades, a aptidão para "resolver problemas matemáticos", (NCTM, 1991, pp. 5-7), que aparece a par com a comunicação e o raciocínio matemático mas com destaque particular: "o foco da Matemática escolar" (p. 7), tal como já tinha acontecido na *Agenda para a Acção* (NCTM, 1980).

Esta crescente preocupação por um novo pensamento matemático está presente em toda a agenda. Na sua globalidade os novos objetivos propostos para os alunos são formulados com um objetivo principal - desenvolver no aluno o seu "poder matemático" (APM 1988):

> *[…]"capacidades de um indivíduo para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, bem como à sua aptidão para usar uma variedade de métodos matemáticos para resolver problemas não rotineiros." (NCTM 1991, p. 6)*

Enquanto na Europa se começava a discutir o ensino da Matemática emergindo o Movimento da Matemática Moderna na América do Norte, Portugal sofria alterações económicas, sociais e culturais profundas assistindo-se a um crescente aumento do setor industrial em detrimento do setor agrícola, a migração para os grandes centros urbanos e a um consequente crescimento das cidades.

Num país onde a maior parte da população era pobre e analfabeta o Governo lança uma campanha de alfabetização de adultos, aumentado gradualmente a escolarização básica.

É neste cenário que no inicio da década de 60 e em sintonia com o que as reformas que se estavam a preconizar no ensino da Matemática, na Europa e América do Norte, a reforma proposta pela Matemática Moderna chegou a Portugal pela mão e empenho de José Sebastião e Silva, acompanhado por alguns outros professores. Em 1963, o Ministro da Educação Nacional Inocêncio Galvão Telles escolhe José Sebastião e Silva para presidir a essa reforma.

Nesse mesmo ano, o Ministério da Educação Nacional assina um acordo com OECE (Organização Europeia de Cooperação Económica) para a criação de "turmas-piloto de matemática moderna" do 3.º ciclo do liceu (10.º e 11.º anos atuais) que começariam a funcionar logo no ano letivo de 1963-64.

Em 1964, José Sebastião e Silva alerta que para modernizar o ensino da matemática é crucial uma mudança nos programas mas também uma mudança no papel do professor, que deve evitar o método expositivo tradicional onde o papel dos alunos desempenhado pelos alunos é quase cem por cento passivo, incentivando e estimulando a imaginação destes.

Em 1965-66, Sebastião da Silva defendia que o excesso de exercícios era responsável pela destruição do cerne do ensino. Entre outros aspetos ele defendia que era necessário atingir um equilíbrio entre o concreto e o abstrato, a intuição e a dedução, a mecanização e a compreensão.

Nos anos 70, vivia-se em Portugal um clima politico e social conturbado, com a Guerra Colonial e um crescente descontentamento com o regime vigente. Em 74 com a queda do regime politico vigente assistiu-se a uma época muito conturbada politica e socialmente. Também o Sistema educacional sofreu alterações e mudanças sucessivas assistindo-se a modificações nos programas de Matemática que conduziram a um progressivo afastamento do espirito do programa preconizado por Sebastião e Silva.

Nos primeiros anos da década de 80, num quadro político e social muito complexo, vivia-se no nosso país uma grande insatisfação no ensino, nomeadamente no que dizia respeito aos programas que eram considerados demasiados extensos e desadequados.

Ao mesmo tempo que se debatia um regresso ao programa defendido por Sebastião da Silva emergia na Europa e América do Norte uma tendência crescente para a renovação curricular da Matemática escolar com particular destaque para a resolução de problemas.

Ainda na década de 80, 1986, é aprovada a nova lei de bases do Sistema educativo onde é estipulado entre outras resoluções o carácter universal, obrigatório e gratuito do ensino básico até ao final do 9º ano (atual).

Nesse mesmo ano, é criada a Associação de Professores de Matemática (APM), que assume como o seu primeiro objetivo, "promover o desenvolvimento do ensino da Matemática" (APM, 1987, p. 1).

Foi graças a esta associação e à sua ação junto dos professores que as ‘novas orientações curriculares’ foram ganhando visibilidade promovendo mudanças dos paradigmas no ensino da matemática que estiveram na origem da renovação pretendida para o ensino da Matemática.

Em 1988, a Associação de Professores de Matemática (APM) seguindo as diretivas da NCTM salienta no seu documento, Renovação do Currículo (APM, 1988), que a mudança mais importante é a alteração profunda nos métodos de ensino e nas atividades apresentadas aos alunos. Nesse mesmo documento, defende-se a crescente necessidade de valorização e a realização de tarefas, nomeadamente a resolução de problemas como uma forma de atividade decisiva em Matemática e que deve ser utilizada para motivar atividades de exploração e investigação.

Cerca de um ano depois são publicados no Diário da República os Novos Planos Curriculares dos Ensino Básico e Secundário (Decreto-lei nº 286/89, 29 de Agosto) e em 1991, depois de um período de experimentação, são aprovados por despacho ministerial os novos programas de Matemática (DGEBS, 1991a/b, 1991c/d e 1991e).

2.2 - RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Neste tópico vamos abordar as questões relacionadas com o raciocínio matemático, nomeadamente caracterizar os diferentes tipos de raciocínio e discutir as suas implicações no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Ser capaz de raciocinar é essencial para usar e compreender eficazmente a Matemática (NCTM, 2007). A compreensão dos conceitos não se reduz ao conhecimento da sua definição. A simples memorização dos procedimentos e representações não estimula os alunos a desenvolver a capacidade de raciocinar não os levando a compreender efetivamente os procedimentos matemáticos. Pelo contrário, a compreensão dos conceitos matemáticos requer uma capacidade por parte dos alunos para perceberem como eles se relacionam uns com os outros.

Para compreender e conseguir desenvolver corretamente os conceitos e procedimentos há que saber aplicá-los, mas também perceber a razão porque funcionam e como podem ser utilizados e interpretados (NTCM, 2009). Só assim é possível desenvolver a capacidade de raciocinar dos alunos levando-os a perceber o papel importante da Matemática.

É impossível dissociar o raciocínio da aprendizagem. É a partir da capacidade que um aluno tem de raciocinar que ele adquire o conhecimento (Thompson, 1996). Todo o processo inerente à aprendizagem (raciocinar, aprender, conhecer) é evolutivo implicando conjeturar, generalizar, investigar o porquê, desenvolver e avaliar argumentos (Lannin, Ellis e Elliott, 2011).

O raciocínio tem um papel fundamental na Matemática escolar e tem sido discutido de forma diversa por diferentes autores, quer seja dando uma maior ênfase aos aspetos lógicos quer seja valorizando mais os processos indutivos.

Para Oliveira (2008) raciocínio matemático é: "um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)" (p.3).

Russel (1999) defende que, desde cedo os alunos devem ser encorajados a expor as suas ideias, para serem verificadas ou refutadas, e a analisar e criticar as ideias dos colegas. Com frequência são elaborados "raciocínios incorretos", muito embora tenha sido feita uma análise correta de um determinado problema. Na sua perspetiva, estas situações podem ser úteis para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, se utilizadas de forma construtiva. Assim, o autor defende que a sua análise deve ocorrer na sala de aula, constituindo mais uma oportunidade de exploração e discussão do problema. Ao examinar um "raciocínio incorreto", seja seu ou de um colega, os alunos beneficiam de mais uma experiência de aprendizagem que os estimula a pensar e a evoluir. Na sua opinião, nos primeiros anos de aprendizagem da Matemática serão quatro os aspetos mais relevantes do raciocínio matemático, afirmando que o raciocínio matemático: (i) é essencialmente desenvolvimento, justificação e uso de generalizações matemáticas; (ii) conduz a uma cadeia de conhecimentos matemáticos num determinado domínio; (iii) dá origem a uma "memória matemática" e providencia as bases para a resolução de problemas matemáticos; (iv) constitui o caminho para o desenvolvimento do conhecimento matemático. Na sua perspetiva raciocínio é tudo "aquilo que utilizamos para pensar sobre as propriedades dos objetos matemáticos e desenvolver generalizações que se apliquem a toda a classe de objetos (…) é a ferramenta para compreender a abstração" (p.1).

Com o intuito de caracterizar o raciocínio matemático e seus processos presentes em sala de aula, Oliveira (2002) identifica quatro tipos de raciocínio: 1) indução; 2) dedução; 3) abdução e 4) transformação. Podemos caracterizar a indução como um tipo de raciocínio que parte do particular para o geral e onde está presente um pensamento do tipo heurístico. Neste tipo de raciocínio (indução) os objetos trabalhados são estáticos, não é necessária uma conclusão e o papel fundamental é o papel da criação de conhecimento. Para Pólya (1954), é a partir da observação que se inicia a indução. Segundo este autor, este tipo de raciocínio está frequentemente presente na resolução de problemas nomeadamente na generalização, especialização e na analogia. Já Oliveira (2002) salienta a estreita ligação entre a analogia e a indução referindo que "quem induz fá-lo por analogia" (p.174).

A dedução, raciocínio característico da Matemática, apresenta um esquema de raciocínio do geral para o particular, exigindo um pensamento lógico ou formal e desempenhando fundamentalmente um papel de validação. Para Oliveira (2002) o raciocínio dedutivo constitui "o elemento estruturante por excelência do pensamento matemático" (p.178).

A abdução desenvolve-se em torno de factos, para os quais se procura uma explicação através da utilização de um pensamento crítico, sendo o papel deste tipo de raciocínio o de explicar e criar conhecimento.

Por fim a transformação, que é caracterizada como um tipo de raciocínio com um papel fundamentalmente de criação e validação de conhecimento, no qual se manipulam objetos dinâmicos e se pretende obter uma explicação ou validação.

Nos processos de raciocínio podem-se distinguir três etapas: 1) formular questões; 2) formular e testar conjeturas e 3) realizar justificações. Quer as questões como as conjeturas podem ser especificas ou gerais, no entanto, a generalização é uma etapa importante do processo de raciocínio (Ponte e Matos; 1996).

Diversos programas de matemática têm vindo a refletir as questões do raciocínio na sua formulação. Por exemplo o programa do 3.º ciclo do ensino básico de 2007 (ME, 2007) refere que os alunos no final do 3.º ciclo devem ter adquirido sete competências :1) formular, testar e justificar conjeturas; 2) distinguir entre demonstração e um teste de uma conjetura, 3) fazer demonstrações simples; 4) identificar e usar raciocínio indutivo e dedutivo; 5) compreender o papel das definições em matemática; 6) distinguir uma demonstração e uma justificação informal e 7) selecionar e usar vários tipos de raciocínio e métodos de demonstração. Uma vez que neste nível de ensino se espera que os alunos estejam familiarizados com processos de raciocínio é necessário, para que estes se tornem competentes na utilização do raciocínio indutivo e dedutivo, que haja espaço para a discussão de conjeturas e afirmações matemáticas com o professor e colegas (NCTM, 2007). Esta ideia defendida na agenda do NCTM é igualmente defendida no programa de Matemática A do ensino secundário (DES, 2001).

Quer seja no relatório Matemática 2001 da APM quer seja no programa do 10.º ano de Matemática A (DES, 2001), a resolução de problemas e a realização de tarefas de investigação e exploração são defendidas como sendo veículos fundamentais ao desenvolvimento do raciocínio e pensamento científico, atendendo aos processos usualmente usados na sua elaboração, de conjeturas e na sua justificação. Esta ideia é igualmente defendida por Ponte, Brocardo, Oliveira (2003) e pelo o NCTM (2007), que considera que "ser capaz de raciocinar é essencial para a compreensão da Matemática" enunciando como normas no desenvolvimento desse raciocínio: (i) reconhecer o raciocínio e a demonstração como aspetos fundamentais da Matemática; (ii) formular e investigar conjeturas matemáticas; (iii) desenvolver e avaliar argumentos e provas matemáticas; e (iv) selecionar e usar diversos tipos de raciocínio e métodos de demonstração.

Pereira e Saraiva (2008) defendem que inserir nas aulas tarefas de exploração e de investigação tais como os problemas pode ajudar a desenvolver o raciocínio e aprendizagem de processos matemáticos.

2.3 - APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES

No ensino da Matemática um dos temas mais importante e com maior relevância no ensino básico e ensino secundário é sem sombra de dúvida o estudo das funções. O seu estudo e os conhecimentos adquiridos são “indispensáveis para a compreensão do mundo em que vivemos” (ME, 2001, p.26).

Ao chegar ao ensino secundário, o aluno já deve de ter adquirido a noção de variável, função, funções afins e as diferentes formas de representar funções. Deve inclusive, seguindo por exemplo as sugestões metodológicas dos programas de Matemática do ensino básico (ME, 2007), conseguir articular entre as diferentes representações nas atividades de aprendizagem que os alunos desenvolvem. Ponte (1984) realça o facto de que mais importante que saber identificar uma função é saber interpretar e relacionar as suas diferentes formas de representação. Também Domingos (2003) e Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) realçam a importância que as conexões entre as diferentes representações de funções têm no desenvolvimento matemático do aluno.

O conceito de função constitui uma ferramenta essencial e poderosa para representar e interpretar situações tanto da realidade como da própria Matemática. Este conceito foi desenvolvido para expressar matematicamente a ideia de dependência ou lei natural que envolvam relações entre variáveis (Domingos 1994).

Para Caraça (1951) o conceito de função é o instrumento próprio para o estudo das leis quantitativas que dão significado à realidade, “uma das tarefas mais importantes no trabalho de investigação da Natureza é a procura de regularidades dos fenómenos naturais” (p. 112).

No entanto, este é um dos conceitos no qual os alunos revelam mais dificuldade, quer na sua compreensão abstrata quer na sua aplicação à resolução de problemas, não conseguindo muitas vezes traduzir uma relação natural entre variáveis através de uma função.

A fim de compreender e analisar o raciocínio matemático utilizado na aprendizagem do conceito de função, há que conhecer algumas teorias sobre o desenvolvimento de conceitos matemáticos e em particular das funções. Vários são os autores que têm estudado e construído teorias em torno desse tema, tais como, uma abordagem "proceptual" dos conceitos (Gray e Tall, 1994) ou a teoria da reificação (Sfard, 1991).

Alguns destes estudos sugerem que a dificuldade dos alunos na compreensão do conceito de função resulta da natureza dual processo-objeto, própria dos conceitos matemáticos. Sfard sugere que esta dificuldade possa estar relacionada com a génese dos objetos matemáticos, "como na sua inacessibilidade a Matemática parece ultrapassar todas as outras disciplinas científicas, tem que haver alguma coisa realmente especial e única no tipo de pensamento envolvido na construção do universo matemático" (Sfard, 1991, p. 2).

A fim de compreender e analisar esta dificuldade dos alunos, Sfard desenvolve a teoria da reificação, na qual considera que é possível conceber na génese da maioria dos conceitos matemáticos duas formas fundamentalmente diferentes: estruturalmente, como objetos- conceção estrutural- e operacionalmente, como processos- conceção operacional. (Sfard, 1991; Sfard, 1992; Sfard e Linchevski, 1994). No entanto, e apesar de aparentemente estas duas conceções parecerem incompatíveis, pois é difícil entender algo como um processo e como um objeto ao mesmo tempo, Sfard salienta que elas são complementares e mutuamente dependentes "Embora ostensivamente incompatíveis, elas são de facto complementares" (Sfard, 1991, p. 4).

Assim, a capacidade de ver uma função ou um número, quer como um processo, quer como um objeto, parece ser indispensável para resolver problemas matemáticos mais avançados. Segundo Sfard, no processo de formação dos conceitos, a conceção operacional é, muitas vezes, a primeira a ser desenvolvida. A abordagem estrutural pode evoluir gradualmente para além desta. Sfard (1987) defende que a passagem da abordagem operacional para a estrutural está relacionada com a forma como se tem processado o desenvolvimento histórico bem como a aprendizagem individual.

Ao olharmos para um conceito matemático, seja ele uma definição, uma expressão algébrica ou qualquer representação, o que cada um "vê" depende não só do contexto em que ele surge, mas também do que somos capazes de perceber no momento. Uma simples expressão algébrica pode ser interpretada de várias maneiras. Esta forma diferente de "ver" um determinado conceito matemático está por detrás das duas conceções referidas por Sfard.

A fim de um melhor entendimento destas duas conceções, vejamos o exemplo estudado por Sfard e Linchevski (1994), que partem da seguinte expressão algébrica: $3(x+5)+1$. Esta pode ser vista de inúmeras maneiras, entre as quais : (i) uma descrição concisa de um processo de cálculo – uma sequência de instruções – 'adiciona 5 ao número considerado, multiplica o resultado por 3 e adiciona 1'; (ii) a representação de um determinado número – considerando o resultado dos cálculos efetuados, quando conhecido o valor de x, e não o processo de os efetuar; (iii) uma função

– não representando, neste caso, um valor fixo mas refletindo uma mudança, ou (iv) uma família de funções (se um dos coeficientes numéricos for substituído por uma letra, por exemplo, a(x+5)+1 e (v) um conjunto de símbolos que, podendo não representar nada, constitui um objeto algébrico que pode ser manipulado de acordo com certas regras bem definidas (Sfard e Linchevski, 1994, pp. 191-192).

Podemos então ver que, a mesma expressão permitiu identificar diferentes 'objetos' matemáticos e, para além disso, evocou uma interpretação de natureza diferente – "quando foi lida como uma série de operações, foi o processo de cálculo, em vez do objeto matemático, que deu significado aos símbolos" (Sfard e Linchevski, 1994, p. 193). Neste exemplo conseguimos distinguir a existência dos dois modos, essencialmente diferentes, de ver uma entidade matemática apresentados por Sfard: 1) uma conceção estrutural segundo a qual as noções matemáticas são tratadas como se se referissem a entidades como objetos reais, como estruturas estáticas permanentes que existem algures no espaço e no tempo, que podem ser manipuladas de acordo com certas regras e combinadas em estruturas mais complexas; 2) uma conceção operacional onde as noções matemáticas são concebidas como um produto de certos processos que é necessário efetuar, ou são identificadas com os próprios processos (Sfard, 1991, 1992).

Assim, a capacidade de ver uma função ou um número, quer como um processo, quer como um objeto, parece ser indispensável para resolver problemas matemáticos mais avançados (Domingos 1994).

Ainda segundo Sfard (1987) a transição da conceção operacional para a estrutural (passagem das operações para os objetos abstratos), é um processo longo (e muitas vezes não alcançado pelos alunos) realizando-se em três fases: (i) interiorização - os processos são realizados em objetos matemáticos já familiares; (ii) condensação - os processos anteriores são transformados em unidades compactas autónomas; (iii) reificação - é adquirida uma capacidade para ver estas novas entidades como objetos permanentes por direito próprio (Sfard, 1987, 1989, 1991, 1992; Sfard e Linchevski, 1994).

No que respeita ao conceito de função, o aluno encontra-se na primeira fase, a fase de interiorização quando aprende a noção de variável e adquire a "capacidade de usar uma fórmula para encontrar valores da variável dependente" (Sfard, 1991, p. 19). Nesta fase, os processos são realizados em objetos matemáticos elementares e estes processos vão-se tornando cada vez mais acessíveis para o aluno, à medida que ele vai desenvolvendo as suas capacidades. Segundo esta teoria, "o processo foi interiorizado quando puder ser realizado através de representações mentais, e quando para poder ser considerado, analisado e comparado, não precisar de ser efetuado no momento" (p. 18).

Na fase de condensação, os processos precedentes sofrem um processo de compactação, o aluno desenvolve a capacidade de pensar sobre um dado processo em termos de input-output, sem necessidade de atender ao que medeia estes dois estados. Este "é o ponto em que se dá o nascimento 'oficial' de um novo conceito" (Sfard, 1991, p. 19). Nesta fase, considera-se que há evolução quando se verifica que o aluno é capaz de combinar facilmente processos, estabelecer comparações, generalizar e alternar entre diferentes representações de um determinado conceito. No caso das funções, quanto mais o aluno for capaz de trabalhar com uma função como um todo, mais avançado está no processo de condensação, sendo capaz de "investigar funções, desenhar os seus gráficos, combinar pares de funções (por exemplo, por comparação) e até encontrar a função inversa de uma dada função" (p. 19).

A reificação ou concretização acontece quando o aluno consegue ver a nova entidade matemática como um objeto completo e autónomo com significado próprio. Assim, o conceito de função é reificado pelo aluno quando este consegue compreender as diversas representações da função (conseguindo passar de uma representação para outra), quando é capaz de resolver equações funcionais, quando revela "capacidade de falar acerca de propriedades gerais de diferentes processos aplicados nas funções (tais como composição ou inversão) e pelo derradeiro reconhecimento de que os cálculos algébricos não são uma característica necessária dos conjuntos de pares ordenados que são entendidos como funções" (Sfard, 1991, p. 20). Esta última fase atinge-se de uma forma súbita, e pode ser definida "como sendo uma mudança ontológica – uma súbita capacidade de ver algo familiar sob uma nova luz" (p. 19).

As duas formas, operacional e estrutural, de abordar o conceito de função sugere a observação de dois princípios didáticos importantes (Sfard, 1989, 1992): (a) os novos conceitos não devem ser introduzidos em termos estruturais, (b) a conceção estrutural não deve ser requerida para além daquilo que os alunos possam fazer sem ela.

Tendo por base estes dois princípios Domingos (1994) afirma que sendo a abordagem estrutural muito mais abstrata, a abordagem operacional deverá precede-la, pois é necessário um período de experiência (interiorização) antes que a conceção operacional passe a estrutural. Por sua vez, uma abordagem estrutural não tem muitas hipóteses de motivar, senão quando for indispensável para passar a um nível superior da teoria.

No caso das funções, a forma como elas aparecem no contexto do cálculo básico, os alunos podem utilizar apenas uma conceção operacional do conceito. A visão das funções como objetos só é necessária quando os problemas a serem resolvidos envolvem a manipulação de várias funções em simultâneo e, assim, cada uma delas deve ser tratada como formando um todo, portanto de uma forma mais estrutural, facilitando a realização matemática e aumentando a facilidade de manipulação dos entes matemáticos, razão pela qual deve ser estimulado junto dos alunos com tempo, discussão e reflexão (Sfard, 1989, 1992).

Uma alternativa à reificação do conceito de função é proposta por Slavit (1997), não como uma nova teoria, mas como uma nova visão das teorias existentes.

Segundo Slavit (1997), os alunos podem interpretar as funções como entidades que possuem, ou não, zeros, simetrias, assíntotas e outros tipos de propriedades. Por exemplo, os alunos podem dizer o que são funções quadráticas descrevendo todas as propriedades que estas funções possuem. Quando um aluno se familiariza com certas propriedades das funções, pode ver uma função como um objeto com ou sem essas propriedades e à medida que os alunos vão conhecendo novas famílias de funções, conhecem também novas propriedades, as quais serão generalizadas de modo a desenvolver uma visão mais geral de função.

Nesta perspetiva, ainda a função quadrática pode ser vista como uma função contínua, com um único extremo, no máximo dois zeros e um eixo de simetria. Os estudantes adquirem esta visão observando propriedades de vários exemplos de funções quadráticas e não-quadráticas. Quando estudam outras funções, aumentam as propriedades funcionais conhecidas, o que fortalece a compreensão global das funções. Slavit (1997) realizou um estudo que indica que alguns alunos do ensino secundário reificaram determinados tipos de funções usando noções orientadas pelas propriedades.

Ou seja, para Slavit (1997), uma função pode ser descrita pelas suas propriedades locais e globais, uma vez que o estudo das suas propriedades é fundamental para a sua caracterização. Propõe assim uma abordagem ao conceito de função orientada pelas propriedades, que é baseada em aspetos visuais de comportamento funcional, sugerindo que os alunos compreendem o conceito de função transformando as suas experiências em compreensões de propriedades específicas.

2.4 - O PAPEL DAS DIFERENTES REPRESENTAÇÕES DE FUNÇÕES E DA CALCULADORA GRÁFICA

2.4.1 - AS DIFERENTES REPRESENTAÇÕES DE FUNÇÕES

Ao longo dos anos tem-se assistido a inúmeras alterações curriculares no ensino da Matemática. A agenda do NCTM (2007) refere que a utilização de representações desempenha um papel essencial para o estabelecimento de relações matemáticas, a explicitação de raciocínios e a identificação de conexões. Seguindo essa mesma linha, emerge o conceito de conexões entre as diferentes representações de conceitos matemáticos, que são consideradas fundamentais para que os alunos possam compreender e aplicar corretamente esses conceitos (ME, 2001).

O estudo das funções é transversal a todos os níveis de ensino, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento abstrato dos alunos e da capacidade de resolução de problemas do quotidiano. Ao longo dos tempos os vários programas curriculares têm apontado para a utilização das diferentes representações dos conceitos. Por exemplo, no ensino secundário, as recomendações metodológicas do programa do 10.º ano de 2001, recomendam para o estudo de funções o recurso às diferentes conexões matemáticas como forma de os alunos desenvolverem a sua capacidade de visualização e de relacionar os diferentes temas (DES, 2001).

Os diversos tipos de representação têm vindo a ocupar uma importância crescente em atividades matemáticas na sala de aula. Deste modo, a ideia de que o conceito de função, para ser globalmente compreendido pelos alunos, deve ser trabalhado através das suas diferentes representações, tem merecido crescente aceitação. Os alunos devem estar aptos a compreender conceitos em diferentes representações e a fazer ligações entre elas e o ensino das funções necessita ser articulado por forma a englobar as representações mais importantes, nomeadamente, a forma gráfica, tabular e algébrica, (NCTM, 2007).

Diversos autores consideram que o conceito de função constitui uma forma de desenvolver a capacidade algébrica dos alunos. Para esse desenvolvimento, Chazan e Yerushalmy (2003) sugerem que as funções sejam abordadas com tarefas que envolvam os alunos a relacionar as representações gráficas com as expressões algébricas. O recurso às diferentes representações no estudo das funções promove, segundo estes autores, uma melhor compreensão por parte dos alunos desta temática.

Segundo Duval (2002), as várias representações de funções apontam para aspetos diferentes do conceito, que em conjunto, contribuem para uma representação global, razão pela qual a conversão entre as diferentes representações tem um papel determinante na compreensão e interpretação das funções.

Uma das maiores dificuldades da aprendizagem da Matemática é a passagem de informação de uma forma de representação para outra. Para Kaput (1999), essa dificuldade reside na falta de ligação dos procedimentos com símbolos algébricos com as suas representações. Também Elia et al. (2007) referem essa dificuldade sendo mais notória entre as representações gráficas e algébricas (Kaldrimidou e Ikonomou, 1998).

Even (1998), realizou um estudo com alunos do ensino superior, no qual mostra que o conhecimento sobre diferentes representações de funções não é independente, mas sim interrelacionado com conhecimentos sobre as funções, o contexto apresentado e as noções subjacentes. Neste estudo foram diagnosticadas dificuldades nos alunos em relacionar diferentes representações de funções, nomeadamente no que se refere à não familiarização com o papel dos parâmetros em diferentes representações de famílias de funções, incluindo famílias de funções que conheciam, como é o caso das funções quadráticas. Os resultados apresentados neste estudo sugerem, que a capacidade para identificar e representar o mesmo objeto em diferentes representações, movendo-se de forma flexível de uma representação para outra, desenvolve uma compreensão conceptual, que permite fortalecer a capacidade para resolver problemas.

Para Kieran (1992), tais dificuldades devem-se à memorização de regras e de procedimentos matemáticos (por exemplo, de resolução de equações e de inequações). Kieran refere ainda que quando confrontados com problemas envolvendo relações funcionais, os alunos apresentam várias dificuldades como, por exemplo: na leitura e interpretação de gráficos que representam uma função; no estabelecimento de relações entre as diferentes formas de representação de uma função; na interpretação dos dados fornecidos pela calculadora gráfica; na interpretação de problemas contextualizados; no domínio de processos de resolução; e no estabelecimento de conexões com outros tópicos da Matemática ou de outras disciplinas. Segundo a autora, essa dificuldade advém do facto de os alunos não dominarem por completo os conceitos e procedimentos aplicando-os sem os compreender.

A fim de examinar as inter-relações entre construção de definições do conceito de função, na identificação de funções nas suas diferentes formas de representação e na resolução de problemas envolvendo funções assim como as dificuldades sentidas pelos alunos, Elia et al (2007), realizaram um estudo com alunos do ensino secundário. Os resultados revelaram as dificuldades dos alunos em dar uma definição própria do conceito de função, assim como na resolução de problemas com funções envolvendo conversões entre diversos modos de representação. Para estes autores estes resultados indicam que os alunos veem nas diferentes representações de uma função, objetos matemáticos distintos e autónomos e não diferentes modos de expressar o mesmo objeto. Confirmam, desta forma, o fenómeno da compartimentação, (Elia, et al,2007), dado que a maioria das representações de funções permanecia compartimentada e o pensamento matemático era fragmentário.

Para Socas et al. (1996), as dificuldades manifestadas no estabelecimento de conexões estão relacionadas com o uso inadequado da simbologia e com a aplicação desajustada de regras e procedimentos, o que tende a levar os alunos à utilização inadequada das fórmulas, das regras e dos procedimentos a eles associados.

A importância das representações na aprendizagem do conceito de função, é também estudada por Kieran (2001) que explora o discurso e as circunstâncias em que ocorre a evolução do pensamento matemático, quando os alunos trabalham aos pares na resolução de tarefas, envolvendo a interpretação e a resolução de problemas gráficos com funções racionais. Neste estudo a autora conclui que os alunos quando expostos a novas situações problemáticas, revelam dificuldades em reproduzir quer graficamente quer simbolicamente o seu raciocínio emergente.

De forma a tornar o processo de aprendizagem da Álgebra efetivo e significativo, Friedlander e Tabach (2001) defendem que trabalhar com várias representações permite excluir as desvantagens de cada uma das representações sendo que estas são primordiais para o ensino da Álgebra. Estes autores consideram que existem quatro representações distintas fundamentais para o ensino da matemática: a representação verbal, a representação numérica, a representação gráfica e a representação algébrica. Friedlander e Tabach (2001) descrevem as vantagens e desvantagens da utilização de cada um dos quatro tipos de representação na aprendizagem da Álgebra. A representação verbal é utilizada para apresentar um problema e revela-se de extrema utilidade para a interpretação das respostas, sendo uma importante ferramenta para a resolução de problemas. Contudo, uma das suas desvantagens é o facto de a linguagem verbal poder ser ambígua e induzir a associações irrelevantes ou erradas, tornando-se num obstáculo na comunicação matemática.

Em segundo lugar, a representação numérica é, normalmente, utilizada como introdução a outro tipo de representação, sendo uma mais valia para um primeiro contacto com a interpretação de um problema e na investigação de casos particulares. No entanto, a falta de generalização pode ser uma desvantagem para a compreensão do problema no seu todo.

Em terceiro lugar, a representação gráfica é essencial, na medida em que permite "retratar" uma função. O estudo dos gráficos é intuitivo e apela ao sentido visual dos alunos. As representações gráficas podem, no entanto, induzir a interpretações erradas, uma vez que representam apenas uma parte do gráfico da função em estudo.

Por fim, temos a representação algébrica. Este tipo de representação é fundamental na representação de padrões e de modelos matemáticos. A manipulação de objetos algébricos é, por vezes, o método mais eficaz para justificar ou demonstrar generalizações. Porém, o uso exclusivo de símbolos algébricos pode criar obstáculos à compreensão dos significados matemáticos e provocar dificuldades na interpretação das respostas aos problemas. Segundo estes autores, tendo em conta que a utilização das diferentes representações apresenta vantagens e desvantagens, as mesmas devem ser usadas e combinadas de forma a propiciarem ferramentas eficazes para a aprendizagem dos objetos matemáticos, nomeadamente das funções.

Segundo (Duval, 2002), as várias representações de funções apontam para aspetos diferentes do conceito, que, em conjunto, contribuem para uma representação global, razão pela qual a conversão entre as diferentes representações tem um papel determinante na compreensão e interpretação das funções.

Duval (2006), realça ainda a importância das conexões entre as várias representações, para a melhor compreensão por parte dos alunos dos conceitos matemáticos, referindo que a ligação das diferentes representações de funções não é fácil de efetuar. Para este autor, as representações só são mobilizadas e desenvolvidas se forem transformadas noutras.

Para Eisner (1997) e Arcavi (1999) as representações têm um papel importante no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Eisner (1997) realça a influência das representações no pensamento dos alunos, considerando que os produtos obtidos se devem, não só à capacidade de aquisição mental de cada individuo, mas também às representações utilizadas no meio onde os sujeitos estão inseridos.

De acordo com o NCTM (2007), os alunos devem ser capazes de "reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas" e serem capazes de "compreender a forma como as ideias matemáticas interrelacionam e se constroem umas a partir das outras" (p. 416). Carreira (2010) corrobora essa ideia referindo o quão importante é o aluno compreender como as ideias matemáticas se relacionam entre si. Segundo esta autora "a criação de conexões em matemática (…) corresponde a um traço da matemática, muito mais do que a um elemento do conhecimento matemático a ser adquirido" (p. 13).

2.4.2 - UTILIZAÇÃO EDUCATIVA DA CALCULADORA GRÁFICA

Segundo Confrey e Smith (1992) construir uma representação das funções através de representações múltiplas e problemas contextuais estabelece uma alternativa para funções que sugere que a experiência de trabalhar em situações funcionais, construindo funções, é mais importante que aprender definições estáticas que mascaram a sua base na atividade humana. Confrey e Smith (1992) e Borba (1993) utilizam como base para o estudo das funções um programa de computador onde as múltiplas representações, que incluem tabelas, gráficos, equações, teclas de calculadora, diagramas de árvore e gráficos de barras, são uma das suas principais componentes.

Para além da diversidade de tarefas, a atividade matemática dos alunos é enriquecida pelo recurso a materiais diversos, nomeadamente à tecnologia. Assim, na elaboração das tarefas, deve promover-se a utilização da tecnologia, uma vez que esta melhora a aprendizagem dos alunos. (NCTM, 2007)

Domingos (1994), também evidencia a importância da tecnologia no estudo das funções. Numa investigação realizada com alunos do 10.º ano, este autor sugere que o computador e a calculadora gráfica são preciosos auxiliares para desenvolver nos alunos a capacidade de distinguir a mesma função nas suas diferentes formas de representação, relacionando-as e passando mais facilmente de uma forma para outra. O autor refere que o computador e a calculadora gráfica permitem estudar um grande número de funções, desenhando e comparando os seus gráficos. Neste estudo é valorizada a abordagem gráfica, uma vez que a visualização dos gráficos pode fornecer aos alunos argumentos para justificarem o seu raciocínio, especialmente no processo de formulação e verificação de conjeturas. Uma abordagem deste tipo facilita, também, a resolução de inequações e o estudo de famílias de funções. Deste modo, na perspetiva do autor, a tecnologia poderá ajudar os alunos a compreenderem o conceito de função na sua globalidade.

Ponte (2009), refere que o uso da calculadora gráfica assim como outras ferramentas tecnológicas, pode simplificar alguns procedimentos rotineiros o que permite uma maior concentração por parte do aluno na compreensão do significado dos conceitos, assim como na elaboração e implementação de estratégias para a resolução dos problemas, e na sua análise crítica.

A tecnologia pode melhorar o ambiente de aprendizagem, mas por si só não ajuda os alunos a decidir quais os aspetos das funções relevantes para a resolução de uma situação problemática, nem como descrever as suas observações e conclusões. Hershkowitz e Kieran (2001) questionam a forma como a calculadora gráfica é utilizada pelos alunos. Num grupo de alunos do 10.º ano aos quais foram propostas tarefas de investigação e resolução de problemas no estudo das funções, tendo a calculadora gráfica à sua disposição, estas autoras investigaram que uso davam os alunos à calculadora gráfica. As autoras verificaram que os alunos minimizaram a importância da representação algébrica, utilizando-a apenas para gerar tabelas e resolveram as situações problemáticas através de procedimentos "mecânicos".

Teixeira et al.(1997) chamam a atenção de que a simples introdução da calculadora gráfica não conduz a uma melhoria significativa da aprendizagem desta disciplina. Quando se representa graficamente uma função na calculadora, o que se vê no visor é apenas uma parte dessa representação. Assim sendo, uma representação gráfica da mesma função com diferentes janelas de visualização assume aspetos distintos que podem sugerir conjeturas "enganadoras", o que exige que os alunos conheçam algumas características do comportamento dessa função. Daqui ressalta o quão importante é a confrontação dos conhecimentos teóricos e dos resultados apresentados pela calculadora gráfica (DES, 2001). Por essa razão, torna-se necessário que o professor tenha consciência das limitações da calculadora gráfica e um conhecimento sólido das razões que estão por detrás de determinados resultados “enganadores” (DES, 2001).

Segundo Ruthven (1996), outra das limitações da calculadora gráfica diz respeito à falta de indicação, no gráfico, da escala que está a ser utilizada. Esta característica pode estar na origem de muitas dificuldades dos alunos, nomeadamente na dificuldade que estes têm em compreender de que forma as alterações dos valores da janela de visualização interferem com o aspeto do gráfico.

Em resumo, podemos dizer que apesar do aspeto visual dos gráficos poder ser visto como uma arma poderosa para a compreensão do conceito de função e das suas propriedades, podem também ser responsáveis por muitas respostas incorretas dadas pelos alunos. Para prevenir tal é necessário que os alunos possuam conhecimentos teóricos acerca do comportamento das funções que estão a ser estudadas. Assim, se as calculadoras gráficas forem usadas de uma forma adequada e eficaz, podem modificar aquilo que os alunos aprendem, a forma como aprendem e como são ensinados. Uma utilização eficiente da calculadora gráfica, por parte dos alunos, é um processo que exige um trabalho intenso com tarefas diversificadas, através do qual devem ser exploradas as suas diferentes funcionalidades.

2.5 - O ENSINO EXPLORATÓRIO COMO METODOLOGIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM

“O nosso papel como professores, ao estabelecer com os alunos um ambiente na aula que os encoraja a exprimir o seu pensamento e ao mesmo tempo permite que coloquem questões uns aos outros, cria, também para nós, um ambiente de aprendizagem. Não se trata apenas de um ambiente que encoraja pensamentos de ordem superior e atividades reflexivas aos nossos alunos, mas também a nós próprios”.

Wood et al., (1996)

Para Ponte (2002, p. 1-2) existem cinco momentos significativos do ensino da Matemática em Portugal: “(i) a acção pedagógica de Bento Caraça; (ii) o programa-piloto de José Sebastião e Silva; (iii) a proposta curricular de Milfontes; (iv) o reajustamento do programa do ensino secundário e (v) a identificação de competências essenciais no ensino básico.”

Nos anos 40 e 50 do século XX, o ensino da Matemática era marcado pela memorização e mecanização. Bento Caraça (1942) criticou esta prática chamando a atenção para a importância das novas tecnologias dessa época: “Duvidamos que as tábuas de logaritmos, como instrumento de trabalho, conservem por muito tempo a soberania que tiveram. Em certos ramos de aplicação da Matemática à vida corrente, a tábua de logaritmos está hoje de largo ultrapassada pela máquina de calcular (...). Cada época cria e usa os seus instrumentos de trabalho conforme o que a técnica lhe permite; a técnica do século XX é muito diferente da do século XVI, quando os logaritmos apareceram como necessários para efetuar certos cálculos. O ensino do liceu que é, ou deve ser, para todos, deve ser orientado no sentido de proporcionar a todos o manejo do instrumento que a técnica nova permite." (Ponte, 2002, p. 4).

Até aos anos 60 deste mesmo século, os professores lecionavam o currículo, limitavam-se a uma pequena lista de temas a tratar, a partir de um livro único e os instrumentos auxiliares eram os livros de exercícios. A aprendizagem valorizada nesses anos eram as competências de cálculo, que na maioria das vezes os alunos aprendiam sem compreender. Este período foi designado por Matemática Tradicional (Benavente et al, 1994).

A partir dos anos 60, foi dada grande importância no desenvolvimento curricular da disciplina de Matemática, acompanhando o movimento da Matemática Moderna, já referido anteriormente. Nesse período os currículos de Matemática foram reformulados, introduziram-se novas matérias dando-se importância ao formalismo. O objetivo do movimento da Matemática Moderna era proporcionar uma melhoria das aprendizagens à entrada na universidade, mas este não foi plenamente atingido. Os programas de Matemática dos anos 70 e 80 são uma mistura de Matemática formalista no estilo moderno com Matemática computacional no estilo tradicional (Benavente et al;1994).

No início dos anos 80, entramos num novo ciclo de desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. É o período da reforma de Veiga Simão. Neste período começaram a surgir, de forma muito mais explícita, referências a objetivos, sugestões metodológicas e indicações sobre avaliação. Uma vez mais, assistiu-se a uma valorização das competências de cálculo passando-se a exigir um rigor extremo da linguagem dos alunos.

Apesar do insucesso que se fazia notar na disciplina de Matemática estas práticas não sofreram alterações nas suas orientações, desde o início dos anos 70 até ao início dos anos 90. A falta de capacidade crítica de avaliação dos fracos resultados obtidos pelos alunos e o isolamento internacional de Portugal são razões apontadas para justificar o facto de este tipo de currículo ter durado tanto tempo (Ponte, Matos e Abrantes, 1998). A adoção destas orientações teve consequências que prejudicaram o ensino tais como: o desaparecimento da geometria dos programas; o estabelecimento de uma tradição de desvalorização do uso de materiais didáticos, dando-se grande ênfase à apresentação formalista da disciplina baseada no simbolismo; a aversão dos alunos a tudo o que tem a ver com a Matemática, reforçando-se uma atitude

Preocupados com o insucesso na disciplina de Matemática a Associação de Professores de Matemática, APM, organiza em 1998, um seminário onde se iria debater a influência de novas correntes sobre o currículo e o ensino que se tinham vindo a desenvolver internacionalmente, em especial as Normas do NCTM e onde foram apresentadas três grandes propostas (1) valorizar objetivos curriculares referentes a capacidades (resolução de problemas e raciocínio matemático) e atitudes positivas em relação à Matemática; (2) dar prioridade, na sala de aula, a tarefas ricas e desafiantes, envolvendo resolução de problemas, explorações matemáticas, raciocínio e comunicação; (3) encarar o programa e os manuais como instrumentos de trabalho e não como meras prescrições a seguir (Ponte, 2002) .

Em 1996, surge um novo movimento de renovação curricular culminado com a publicação do Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais, no início do ano letivo 2001/2002, coordenado por Paulo Abrantes. Neste currículo as orientações curriculares estão formuladas em termos de competências, que integram conhecimentos, capacidades e atitudes a desenvolver pelos alunos, por área disciplinar e por ciclo, e de tipos de experiências de aprendizagem a proporcionar aos alunos. Em relação à disciplina de Matemática o currículo de 2001 acentua o seu carácter formativo, “A ênfase da Matemática escolar não está na aquisição de conhecimentos isolados e no domínio de regras e técnicas, mas sim na utilização da Matemática para resolver problemas, para raciocinar e para comunicar, o que implica a confiança e a motivação pessoal para fazê-lo.” (Ponte, 2002, p.11).

Numa sociedade global e em permanente mudança, como aquela em que vivemos atualmente, onde todos os dias somos confrontados com inúmeros fatores que captam a nossa atenção, os desafios com os quais as escolas e professores se confrontam são cada vez maiores. A tarefa mais importante que se impõe aos professores nos dias de hoje é conseguir que os alunos aprendam a gostar de Matemática.

É importante criar um ambiente agradável numa sala de aula, de modo a que os alunos se sintam motivados e interessados por aprender. De acordo com o que é defendido globalmente, pelas orientações curriculares, quer nacionais, quer internacionais, a Matemática pode e deve ser apropriada para todos os alunos (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999; NCTM, 2007; Ponte et al., 2007). Para que tal seja possível é importante a motivar os alunos a aprender. A forma como o professor pensa, planifica e desenvolve o trabalho em sala de aula depende da própria interpretação das orientações curriculares, dos objetivos de aprendizagem que define, bem como das características, interesses e necessidades dos alunos, das condições e recursos de que dispõe e do contexto escolar e social em que se insere (Gresalfi & Cobb, 2011; Ponte, 2005).

Para que isso esteja ao alcance de todos, o NTCM (2000) considera que a chave do desempenho matemático está na mudança da natureza do ensino e não da criação de um conjunto de procedimentos bem afinados e cada vez mais elaborados. Esta ideia encontra-se presente nas orientações curriculares, nas quais se pode ler que é fundamental que os alunos ocupem tempo com a resolução de tarefas de exploração e de natureza investigativa para que eles tomem conhecimento dos factos e dos métodos de descoberta matemática.

Na aprendizagem exploratória, a aula decorre de modo diferente: os alunos recebem tarefas e têm de descobrir estratégias para as resolver. O professor pede ao aluno para explicar e justificar o seu raciocínio. Deste modo, ao justificar os seus raciocínios de maneira lógica, o aluno torna-se também numa autoridade na sala de aula (Ponte, 2005).

Saraiva (2002) salienta a importância do papel do professor na promoção da atividade matemática dos alunos. Para este autor, o professor, para elaborar tarefas de exploração e investigativas, precisa mobilizar não só teorias e técnicas, mas também as suas conceções, os seus sentimentos e o seu conhecimento prático (Saraiva, 2002).

Dada a importância da escolha das tarefas matemáticas, o NCTM (1994) indica as características que devem ter, de modo a estimularem o raciocínio dos alunos: 1) Apelar à inteligência dos alunos; 2) Desenvolver a compreensão e aptidão matemática; 3) Estimular os alunos a estabelecer conexões e a desenvolver um enquadramento coerente para as ideias matemáticas; 4) Apelar à formulação e resolução de problemas e ao raciocínio matemático; 5) Promover a comunicação sobre Matemática; 6) Mostrar a Matemática como uma atividade humana permanente; 6) Ter em atenção diferentes experiências e predisposições dos alunos; 7) Promover o desenvolvimento da predisposição de todos os alunos para fazer Matemática.

Em síntese, o ensino exploratório pode servir como elemento motivador para a aprendizagem dos alunos, proporcionando momentos de partilha e reflexão sobre os conceitos em estudo. Ao propor tarefas diversificadas o professor está a apelar ao desenvolvimento do raciocínio dos alunos, permitindo-lhe estabelecer conexões matemáticas entre os vários conceitos em estudo.

2.6 - RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E TAREFAS DE INVESTIGAÇÃO

As tarefas matemáticas podem ser caracterizadas segundo diferentes perspetivas. Ponte (2005) define quatro diferentes tipos de tarefas, a saber: exercícios, problemas, tarefas de exploração e tarefas de investigação.

Segundo Ponte (2005), o exercício e o problema apenas diferem no grau de desafio, nem sempre sendo fácil distingui-los, porque o grau de desafio depende dos conhecimentos previamente adquiridos pelos alunos. Ou seja, o que pode ser considerado um problema para alguns, pode ser um exercício para outros. O aspeto central na distinção entre problema e exercício prende-se então com o conhecimento do aluno relativamente a um processo imediato para resolver a questão que se lhe coloca. Se este conhece esse processo e o consegue implementar, a questão será um exercício; no caso contrário, será um problema.

A resolução de problemas é uma estratégia que pode ser utilizada para motivar os alunos, pois obriga a que não sejam meros atores passivos, e se tornem mais interventivos no pensar matemático (Duarte, 2000).

O NCTM (2007) refere que a resolução de problemas serve igualmente para compreender melhor a matemática e o processo de ensino-aprendizagem da mesma, potenciando nos alunos o processo de exploração e desenvolvimento dos conhecimentos adquiridos, bem como a aquisição de novos conhecimentos, servindo de estímulo no seu processo de aprendizagem. Através da aprendizagem da resolução de problemas em matemática, "os alunos irão adquirir modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança em situações desconhecidas, que lhes serão muito úteis fora da aula de matemática. Na vida quotidiana e no trabalho, ser hábil na resolução de problemas poderá acarretar-lhes muitas vantagens" (NCTM, 2007, p. 57).

As Normas do NCTM de 1991, referem que para a resolução de problemas de matemática os alunos deverão possuir as seguintes competências: Saber investigar e compreender os assuntos matemáticos; Saber correlacionar conhecimentos matemáticos, recorrendo a estratégias na aplicação da resolução de problemas da matemática; Saber reconhecer e formular problemas tanto ligados diretamente ou indiretamente à matemática; Saber relacionar os conhecimentos adquiridos para a resolução de situações problemas da vida real.

Porém também as tarefas de investigação matemática têm o seu papel importante no ensino exploratório. Ponte (2003) advoga que este tipo de tarefas possibilita ao aluno agir como se fosse um matemático, pois existe uma situação aberta, na qual cabe aos alunos ou a quem investiga o papel de definir as questões, podendo os pontos de chegada não ser os mesmos.

As tarefas de investigação "[...] Ajudam a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjeturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor" (Ponte, 2003, p. 23). Assim, para Ponte (2003), ao promover momentos de discussão, as tarefas de investigação desenvolvem não só a capacidade de argumentação dos alunos, mas também a capacidade de visualizar, classificar, conjeturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair ou provar.

3 - METODOLOGIA

Este capítulo descreve a metodologia de investigação adotada neste estudo, que se insere no paradigma interpretativo, numa abordagem qualitativa e na modalidade de estudo de caso. É feita uma caracterização dos participantes que foram selecionados para esta investigação, indicam-se as fases do estudo, e, por último, os instrumentos de recolha de dados e os processos de análise de dados.

3.1 - OPÇÕES METODOLÓGICAS

O principal objetivo deste estudo é compreender os processos de raciocínio usados por alunos do 10.º ano, num estudo exploratório com recurso a tarefas de investigação e resolução de problemas numa unidade de ensino sobre o tópico *Funções*. Para o desenvolvimento do trabalho de investigação no âmbito da consecução do objetivo definido foram formuladas quatro questões:

1. Como se carateriza a compreensão dos conceitos no estudo das funções a partir de uma abordagem centrada no ensino exploratório?
2. Como se caracterizam os raciocínios desenvolvidos pelos alunos quando envolvidos em ambientes de ensino exploratório?
3. Qual o papel das diferentes representações na aprendizagem do conceito de função?
4. Qual o papel da calculadora gráfica no desenvolvimento do raciocínio matemático?

Todos os métodos de investigação têm as suas virtudes e defeitos, assim sendo e de acordo com o defendido por Leal (1992) a escolha do método de investigação deve fazer-se de acordo com a natureza do problema em estudo. Também para Bodgan e Biklen (1994), na investigação qualitativa, as questões formuladas na investigação pretendem orientar o estudo e são estabelecidas com o intuito de analisar o fenómeno em toda a sua complexidade e no seu contexto natural. Uma vez que neste estudo se pretende compreender a realidade tal como ela é, experienciada pelos sujeitos a partir do que pensam e como agem optou-se por uma abordagem qualitativa inserida num paradigma interpretativo.

Este tipo de abordagem privilegia essencialmente a compreensão e a explicação, pretendendo desenvolver e aprofundar o conhecimento de uma dada situação num dado contexto a partir da perspetiva dos sujeitos da investigação, (Leal 1992).

Bogdan e Biklen (1994) sistematizam a investigação interpretativa ou qualitativa em cinco grandes ideias que remetem para a própria essência da investigação qualitativa.

1) “Na investigação qualitativa a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal” (p. 47). De facto, no presente estudo, a fonte direta dos dados é uma turma em contexto escolar, sendo o investigador o instrumento principal de recolha de dados. Com efeito, os dados recolhidos em ambiente natural são importantes para este estudo uma vez que é perante a atividade de investigação que o aluno desenvolve um mecanismo de interação crítica consigo próprio, com os seus colegas e com o professor, que o leva a construir ou reconstruir o seu percurso de aprendizagem.

2) “A investigação qualitativa é descritiva” (p. 48). Os dados recolhidos neste estudo dizem respeito aos processos de aprendizagem dos alunos, observados em situações diferentes. Para a compreensão do significado dos dados obtidos, estes são recolhidos na forma de palavras e não de números dando origem a uma investigação com resultados escritos, contendo citações com base nos dados para ilustrar a_construção de uma visão sobre a problemática investigada. Deste modo, emerge uma apresentação dos resultados com pormenores descritivos. Também foram recolhidos dados biográficos dos alunos.

3) “Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos” (p. 49). Também é importante que neste tipo de abordagem se valorize mais o raciocínio que o aluno desenvolve na realização dos relatórios e dos problemas, e a reflexão sobre todo o processo de aprendizagem desenvolvido, do que conhecer os erros, os obstáculos surgidos e os resultados finais. Privilegia-se desta forma o processo em detrimento dos produtos ou resultados.

4) “Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva” (p. 50).

Não se recolhe dados com o objetivo de confirmar hipóteses construídas previamente, mas são construídas abstrações à medida que os dados, que são recolhidos, se vão agrupando. Assim, nesta investigação não se pretende estudar uma hipótese previamente estabelecida, mas sim analisar as diferentes aprendizagens dos alunos quando confrontados com diferentes instrumentos de avaliação e as suas dificuldades.

5) “O significado é de importância vital na abordagem qualitativa” (p. 50).

Neste estudo, o ponto de vista dos participantes foi uma preocupação permanente, uma vez que se pretendia conhecer as suas opiniões sobre as vantagens e desafios da utilização dos instrumentos alternativos de avaliação e como lidavam com os desafios para poderem fazer face às suas próprias aprendizagens. Durante a tomada das notas de campo foi prática frequente o questionar dos participantes para que explicassem melhor determinadas intervenções de modo a proporcionar conhecimento e compreensão mais precisos acerca das suas atitudes e opções.

3.2 - O ESTUDO DE CASO QUALITATIVO

Segundo Ponte (2006), um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social.

Ao adotar o modelo de investigação interpretativo-qualitativo, optou-se por uma metodologia estudo de caso pois "é um design ideal para compreender e interpretar observações do fenómeno educativo" (Merriam 1988, p.2).
Merriam (1988) e Ponte (2006) referem que o estudo de caso é particularmente ajustado quando as questões são do tipo "como?" e "porquê?".

Segundo Ponte (2006) um estudo de caso é uma investigação que aborda deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial. Por seu lado Stake (2005, p.11 citado por Craveiro p.206) define estudo de caso como "estudo de particularidade e da complexidade de um caso singular para chegar a compreender a sua complexidade". Yin (1989), define estudo de caso como "uma investigação empírica que estuda um fenómeno contemporâneo dentro do contexto de vida real, especialmente quando as fronteiras entre o fenómeno e o contexto não são absolutamente evidentes"

Para caracterizar o estudo de caso, Ludke e André (1986) referem sete características para este tipo de investigação qualitativa:
(1) visam a descoberta, na medida em que podem surgir, em qualquer altura, novos elementos e aspetos importantes para a investigação além dos pressupostos do enquadramento teórico inicial;
(2) enfatizam a interpretação em contexto, pois todo o estudo desta natureza tem que ter em conta as características da escola, o meio social em que está inserida, os recursos materiais e humanos, entre outros aspetos;
(3) retratam a realidade de forma completa e profunda;
(4) usam uma variedade de fontes de informação;
(5) permitem generalizações naturalistas;
(6) procuram representar as diferentes perspetivas presentes numa situação social; e
(7) utilizam uma linguagem e uma forma mais acessível do que outros métodos de investigação.

Como principais vantagens deste tipo de investigação, Vale (2000) aponta o facto de este ser um método ideal para caracterizar e aprender acerca de um indivíduo em particular. Outra vantagem muito importante nos estudos de caso é o facto de o investigador poder, a qualquer momento da investigação alterar os métodos da recolha de dados e estruturar novas questões de investigação.

Vários autores como Lee, Yarger, Lincoln, Guba, Gravemeijer e Shulman (citados por Vale, 2000) recomendam como metodologia de investigação o estudo de caso, considerando-o a melhor escolha para uma investigação em educação. E ainda sugerem que se um investigador pretende estudar o que um aluno pensa, então deverá observar e participar nas atividades com as quais o aluno está envolvido no seu contexto natural: a sala de aula.

Num estudo de caso, o investigador, depois de recolher todo o tipo de dados de cariz qualitativo, tem poucas orientações ou caminhos no sentido de analisar os dados obtidos, portanto, é essencial conhecer a perspetiva dos alunos e compreender o seu ponto de vista para tentar perceber o significado que os alunos atribuem às diferentes situações propostas pelo investigador.

Dado que o objetivo do estudo tinha por base analisar e compreender os processos de raciocínio desenvolvidos por alunos do 10.ºano num estudo exploratório com recurso a tarefas de exploração e investigação, optou-se por uma metodologia de natureza qualitativa na modalidade de estudo de caso porque me pareceu ser aquele que melhor poderia responder às questões colocadas.

Na investigação em causa, procurou-se observar pormenorizadamente o comportamento de seis alunos, relativamente às questões já enunciadas e foi fundamental que isso tivesse sido realizado em contexto escolar, pois o ambiente escolar foi determinante para a maioria dos acontecimentos ocorridos e para a compreensão dos comportamentos observados.

Para além de tudo o que já foi referido, importa ainda salientar que este estudo não foi realizado com preocupação de generalização de resultados. Apenas se pretendeu investigar o trabalho de seis alunos, tendo por base as questões inicialmente formuladas, e assim obter resultados específicos relativos a esses participantes.

3.3 - FASES DO ESTUDO EMPÍRICO

Este estudo decorreu entre setembro de 2014 e junho de 2015 e passou por três fases.

Na primeira fase foi realizada uma revisão de literatura dos temas a aprofundar de natureza teórica e empírica e da metodologia de Investigação a adotar. Neste período, que decorreu entre setembro e dezembro de 2014, foram elaboradas as tarefas da unidade didática e preparados os instrumentos para a recolha de dados.

A segunda fase, relativa à recolha de dados (realização das tarefas, diário de bordo e entrevista) decorre no período compreendido entre fevereiro e abril de 2015.

A terceira e última fase, de abril a junho de 2015, é destinada à análise detalhada de todos os dados empíricos. Posteriormente procedeu-se à realização de leituras de modo a complementar as anteriormente feitas e à produção por escrito dos resultados e conclusões da Investigação.

3.4 - INSTRUMENTOS DE RECOLHA DE DADOS

Neste estudo foram utilizados os seguintes meios de recolha de dados:

(1) registos escritos feitos pela investigadora na observação dos alunos nos momentos da realização dos relatórios e resolução e problemas;
(2) documentos escritos produzidos pelos alunos quando da resolução individual dos problemas e da realização em grupo dos relatórios;
(3) entrevista semiestruturada feita aos alunos.

A recolha de dados neste estudo foi exclusivamente feita pela investigadora e no contexto escolar e decorreu entre os meses de janeiro e abril de 2015, na sequência que se apresenta de seguida:

- 1.º relatório "Investigando a função quadrática" – 29 de janeiro;
- 1.ª sessão individual: resolução do problema "Área mínima" – 4 de fevereiro;
- 2.º relatório "Investigando a função módulo" – 11 de fevereiro;
- 2.ª sessão individual: resolução do problema "O voo dos gansos" – 26 de fevereiro;
- 2.º relatório "Às voltas com a função polinomial" – 12 e 16 de março;
- 3.ª sessão individual: resolução do problema "Administração de antibióticos" – 8 de abril;
- Entrevista individual: grupo 1 – 9 abril; grupo 2 – 10 abril

3.4.1 - O RELATÓRIO ESCRITO

O relatório escrito tem sido, nos últimos anos, um tipo de tarefa usualmente proposta aos alunos em Matemática, consolidando algumas das orientações curriculares que têm vindo a ser propostas em diversos momentos de reflexão sobre desenvolvimento curricular. Aparece em paralelo a outro tipo de tarefas em Matemática, como seja por exemplo as investigações matemáticas, sendo usadas várias modalidades de relatório: individual ou em grupo, feito na sala de aula ou fora desta (Santos, 2002).

Mosquito (2008), apoiando-se em (Ponte *et. al.*, 1997), define que os trabalhos/relatórios são produções escritas, realizadas pelos alunos, que podem ser mais ou menos extensas, sobre problemas, atividades de investigação ou projetos em que eles trabalharam, que podem constituir simultaneamente um fator de aprendizagem e um elemento significativo de avaliação. Também para Nunes (2004), a realização do relatório da tarefa de investigação tem como objetivo ajudar os alunos a enunciar as diferentes fases da investigação, os materiais utilizados, as estratégias de investigação as conjeturas formuladas e a sua verificação, e a argumentar e comunicar por escrito as suas conclusões, sendo individual ou em grupo de acordo com a natureza e os objetivos de cada tarefa.

No estudo realizado, Leal (1992) refere que o trabalho com este instrumento não apresentou dificuldades aos professores e o tempo gasto foi considerado reduzido, sendo assim o seu grau de aplicabilidade visto como elevado. Foi um instrumento de avaliação bem aceite pelos alunos, sendo valorizado o facto de ser em grupo e de ter sido realizado na aula. A natureza escrita deste trabalho, embora possa ser uma dificuldade adicional para os alunos, é uma das suas grandes potencialidades, por ajudá-los a desenvolver a capacidade de comunicação escrita.

O relatório escrito realizado individualmente e fora da sala de aula, resultante de um trabalho ainda realizado em grupo, foi outra variante também estudada, que segundo Leal (1992), teve resultados muito idênticos aos já apresentados para o relatório escrito realizado em grupo. A maioria dos alunos manifestou maior adesão a este tipo de instrumento quando comparado com o anterior, argumentando que, por um lado, o desenvolvimento da tarefa feita em grupo favorece a troca de ideias, mas por outro, o facto de ser individual permite que os professores avaliem o seu trabalho de uma forma mais "precisa" e "correta".

Para as professoras envolvidas no estudo de Leal (1992), a realização da proposta de trabalho não apresentou dificuldades e, quanto à sua adaptabilidade a outros contextos, foi considerada como condição necessária os alunos terem já desenvolvido uma dinâmica de trabalho de grupo. Já no estudo de Menino (2004) são salientados desafios acrescidos na gestão da aula em que o instrumento é utilizado, nomeadamente nas incertezas sentidas quanto à transferência de um maior grau de liberdade a dar ao aluno. Também a classificação destes trabalhos se revelou problemática. Para estas professoras, o principal desafio residiu no uso de critérios, tendo em atenção as características individuais dos alunos.

Uma professora estudada por Menino (2004) faz referência explícita a aspetos relativos à expressão escrita, à organização de ideias, à construção de cadeias lógicas de pensamento e à autonomia, enquanto outra destaca mesmo a reflexão sobre a atividade matemática, referindo que o relatório lhe mostra como os alunos pensam e o modo como organizam o seu pensamento.

A avaliação dos relatórios é realizada com base numa tabela de descritores e o *feedback* escrito e oral dos relatórios tem como objetivo a evolução progressiva e contínua das aprendizagens dos alunos.

3.4.2 - A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Quantos de nós podem afirmar que nunca confundiram problema com exercício e vice-versa? Se tivermos em conta a definição do dicionário eletrónico Priberam, problema é, tendo em conta o contexto, uma 'questão matemática proposta para se lhe achar solução', não é de estranhar que confundamos muitas das vezes exercício com problema.

Os problemas fazem parte do currículo escolar essencialmente como veículo de introdução de conceitos e prática de exercícios. Assim, as secções da resolução de problemas dos testes normalizados, contêm simples aplicações de conhecimentos a situações problemáticas já bem ensaiados e nos quais já se conhece bem a estrutura. Estes testes poderão conter tipos de exercícios trabalhados nos livros de texto e do tipo de ensino praticado, mas estão longe de trabalhar tipos de problemas mais abertos e originais (Kilpatrick, 1991 em Abrantes 1995).

No sentido de esclarecer esta questão em torno dos problemas e dos exercícios, Abrantes (1989) citando Kantowski (1981), refere que "um problema é uma situação que difere de um exercício pelo facto de o aluno não dispor de um procedimento ou algoritmo que conduzirá com certeza a uma solução". Abrantes (1989) citando parte do documento do NCTM (1987) indica que:

> *"A resolução de problemas deve ser um processo que envolva ativamente os alunos na formulação de conjeturas, na investigação e exploração de ideias, que os leve a discutir e pôr em questão a sua própria maneira de pensar e também a dos outros, a validar resultados e a construir argumentos convincentes. Por isso mesmo, a resolução de problemas não acontece quando os alunos fazem uma página de cálculos (…)". (p.8)*

Obviamente que a prática regular de exercícios não é uma tarefa descabida, já que permite dominar técnicas de cálculo que também são importantes. No entanto é importante resolver problemas e definir bem o seu lugar na aprendizagem.

É também importante que se dê oportunidade aos alunos para explorarem, resolverem, investigarem e discutirem problemas nas mais variadas situações para que este tipo de aprendizagem seja realmente significativo. Desta forma, é importante que os professores e alunos tenham consciência do que significa um exercício e um problema e que um, pode facilmente tornar-se no outro se não fizermos uma "leitura" correta de cada situação. É preciso saber tirar o melhor partido das duas ferramentas, os exercícios, no sentido de dominar as técnicas de cálculo e os problemas com o objetivo de desenvolver o raciocínio.

A resolução de problemas em Portugal surge como o reverso de um ensino dito como abstrato e repetitivo, caraterísticas da Matemática Moderna, porém, não em oposição a um ensino que se pretendia limitado às funções matemáticas mais básicas (caraterística do movimento *Back to Basics*), (Matos, 2008). O aparecimento da Associação de Professores de Matemática (APM) em 1986 e a as Normas de Avaliação do NTCM foram dois marcos importantes na crescente importância dada à resolução de problemas em termos curriculares, já que, recomendavam que a resolução de problemas fosse o foco do ensino nos anos 80 do século passado.

Sendo a resolução de problemas um dos aspetos fundamentais da matemática, são dadas poucas indicações de como avaliá-la. Sabemos que apesar dos muitos esforços para tornarmos a avaliação rigorosa e objetiva, a verdade é que, na maior parte das vezes caímos em alguma subjetividade e a avaliação da resolução de problemas não é exceção.

Cockcroft (1982) citado por Abrantes e Leal (1991, p.72) dá sua visão sobre o que deve ser a avaliação da resolução de problemas:

> *"A avaliação deve ser acompanhada de um método adequado de registo dos processos realizados…Qualquer que seja o método utilizado, dever-se-á incluir qualidades tais como… a perseverança na resolução de problemas, a capacidade para usar os conhecimentos e para abordar oralmente os temas matemáticos".*

As Normas do NCTM seguem a mesma ideia, a avaliação deve ser baseada em dois pilares, o quê e como. Uma das formas de avaliar a resolução de problemas é realizando uma composição escrita. Kilpatrick (1991), refere que quando é solicitado aos alunos para escrever um relatório essa atividade é muito semelhante a escrever uma composição, logo a resolução descrita pode ser avaliada de um modo muito parecido de que como se avalia um ensaio. O autor refere que a "matemática está relacionada com a comunicação. O aluno que não consegue comunicar aquilo que fez com um problema não o resolveu verdadeiramente".

3.4.3 - DIÁRIO DE BORDO

O diário de bordo é fundamental na observação participante e é um suplemento importante a outros métodos de recolha de dados de natureza qualitativa (observação e análise de documentos). O diário de bordo é o instrumento "onde o investigador regista os acontecimentos relevantes que vão surgindo no decurso do trabalho, bem como as ideias e preocupações que lhe vão surgindo" (Ponte, 2002, p. 18).

Segundo Bogdan e Biklen (1994) este instrumento consiste em dois tipos de materiais – descritivos e reflexivos. Na parte descritiva são registados de uma forma objetiva os detalhes do que ocorreu no campo e englobam as seguintes áreas: (i) retratos dos alunos; (ii) reconstruções de diálogos; (iii) descrição do espaço físico; (iv) relatos de acontecimentos particulares; (v) descrição de atividade; e (vi) o comportamento do observador. A parte reflexiva contém registos de carácter pessoal, designadamente: (i) reflexões sobre a análise; (ii) reflexões sobre o método; (iii) reflexões sobre conflitos e dilemas éticos; e (iv) reflexões sobre o ponto de vista do observador.

A fim de facilitar a recolha de dados aquando da observação durante a realização das tarefas de investigação e resolução de problemas elaborei um guião (Anexo 2) que foi utilizado durante as aulas em que os alunos realizaram as tarefas de investigação e que me orientou na recolha dos dados, com a seguinte estrutura: (i) identificação da aula, com o número da aula, o número da tarefa, tempo e data; (ii) antes da aula, as expectativas do professor em relação à tarefa; (iii) durante a aula, salientar a forma como é apresentada a tarefa aos alunos, o desenvolvimento da tarefa (tipo de questões colocadas, comentários dos alunos, tipo de dificuldades); (iv) reflexão sobre os momentos da aula.

Em relação às sessões individuais com os alunos, estas foram gravadas em áudio com o objetivo de "capturar" o diálogo entre os alunos e a investigadora sem se correr o risco de se perderem dados relevantes. Numa segunda fase, o material áudio foi transferido para o computador, transcrito e posteriormente analisado para constarem no estudo. Para além da transcrição dos dados, digitalizaram-se os relatórios e fichas de problemas para suporte aos dados transcritos, pois segundo Bogdan e Biklen (1994) na análise qualitativa tudo o que é alvo de exame tem potencial para ser um ponto importante para que compreendamos melhor o nosso objeto de estudo.

3.4.4 - ENTREVISTA

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a técnica do inquérito por entrevista adequa-se aos propósitos da investigação de carácter qualitativo, dado que o seu objetivo primordial não é quantificar, confirmar ou infirmar hipóteses, mas o conhecimento mais aprofundado de perspetivas do participante. Implica interação presencial e direta, com a tónica na qualidade e proximidade, e é benéfica quando o investigador não encontra na bibliografia ou na observação direta resposta às questões.

Apesar de existirem outros tipos, a entrevista semiestruturada (Bogdan & Biklen, 1994) afigurou-se como a mais adequada, porque, por um lado, possibilitou, a uma investigadora sem experiência, como é o caso, ter um suporte - o guião - e, por outro lado, como a recolha foi feita pela investigadora e simultânea ao levantamento de novas questões, o carácter aberto e adaptável permitiu a ampliação e enriquecimento deste instrumento.

Segundo Menino (2004) referenciando Patton (1987) o sucesso de uma entrevista depende em larga medida do modo como é preparada e de como é conduzida. As perguntas devem de ser claras e é fundamental que na sua condução o entrevistador não induza respostas pré-determinadas.

Assim, durante a preparação do guião procurei antecipar perguntas que gerassem boas respostas e no decorrer da sua aplicação preocupei-me que as questões não fossem imutáveis e fui adaptando as mesmas aos participantes entrevistados de modo a facilitar a compreensão e o diálogo.

3.5 - ANÁLISE DOCUMENTAL

Para Ludke e André (1986) a análise documental constitui uma técnica importante na pesquisa qualitativa, principalmente como forma de complementar informações obtidas por outras técnicas. Ao longo desta investigação foram recolhidos e fotocopiados diversos documentos produzidos pelos alunos que integram este estudo, como relatórios das tarefas propostas (investigando a função quadrática, investigando a função módulo e às voltas com as funções polinomiais), resoluções de problemas propostos ("área mínima", "o voo dos gansos" e "administração de antibiótico").

3.6 - PARTICIPANTES

Neste tipo de abordagem metodológica, como é o estudo de caso, não se privilegia uma amostragem aleatória e numerosa, mas sim criteriosa ou intencional, ou seja, a seleção da amostra está sujeita a determinados critérios que permitam ao investigador aprender o máximo sobre o fenómeno em estudo (Vale, 2000).

O presente estudo decorreu, durante o 2.º e início do 3.º período do ano letivo 2014/2015 em dois ambientes distintos: em sala de aula e fora do contexto de sala de aula, nas instalações da ESJP.

Os participantes na investigação são um conjunto de seis alunos, agrupados em dois grupos sendo que cada um dos grupos constitui um estudo de caso. Os participantes do estudo pertencem todos à mesma turma do 10º ano de escolaridade.

Entre os vinte e um alunos selecionei seis para serem objeto de estudos de caso que desde logo se mostraram recetivos e manifestaram total disponibilidade para colaborar. Para proceder à escolha dos participantes estabeleci critérios de seleção, que tiveram em conta os objetivos que se pretendem analisar neste estudo.

Assim sendo, selecionei os seis alunos a partir da observação direta na sala de aula, utilizando como critérios de seleção:

- O seu interesse, participação, envolvimento e motivação na realização de tarefas propostas, quer em sala de aula quer como trabalhos de casa;

- A sua perseverança sempre que não conseguem ultrapassar uma dificuldade; desempenho em sala de aula;
- O aproveitamento no final do 1.º período.

Os alunos, após a sua seleção pelos critérios apresentados anteriormente, foram abordados diretamente e convidados para participar na investigação. Em seguida foi realizado um pedido de autorização aos encarregados de educação, onde foi apresentado o estudo a realizar, explicitando as suas caraterísticas e quais os objetivos de investigação.

Estes seis alunos foram agrupados em dois grupos de três alunos. Na formação dos grupos optou-se por a homogeneidade dentro de cada grupo entre os alunos no que concerne aos critérios em cima descritos, por se pretender que ao terem o mesmo nível de conhecimento a contribuição de cada um dos alunos nas tarefas fosse igual.

CARATERIZAÇÃO DOS PARTICIPANTES

No primeiro grupo temos o Manuel, a Vanda e o Pedro. Durante o 1.º período estes três alunos mostraram-se sempre com uma grande motivação nas aulas de matemática, participando com muito empenho quer oralmente quer em tarefas escritas. Os seus desempenhos a nível dos testes sumativos no 1.º período foram semelhantes.

Apresento agora resumidamente os alunos do 1.º grupo:

A Vanda é a mais estudiosa do grupo. É muito interessada mostrando-se sempre motivada para novas aprendizagens. É uma aluna com bom comportamento e sempre atenta. Gosta de participar e é bastante perseverante não desistindo de alguma dúvida que lhe surja. A sua nota no final do 1º período foi de 15 valores.

O Pedro é muito interessado tendo uma enorme sede de novas aprendizagens, e por essa razão gosta de novos desafios que o obriguem a raciocínios mais elaborados. Quando se encontra perante uma dúvida ou dificuldade, o Pedro não desiste até ficar esclarecido. Gosta muito de participar na aula e em todas as tarefas propostas. No final do 1º período a sua nota foi de 16 valores.

O Manuel é o menos trabalhador e mais falador deste grupo, no entanto, gosta de novos desafios para os quais se sente especialmente motivado. É muito perspicaz conseguindo acompanhar os temas lecionados sem grande esforço. Gosta de participar e é muito comum surgir com novos raciocínios na resolução de exercícios. Contudo, a sua classificação no 1.º período foi de 14 valores, fruto da sua falta de estudo em casa.

O segundo grupo é constituído pela Maria, a Carolina e a Francisca. Estas três alunas são interessadas e motivadas, contudo, essa motivação variava consoante os temas abordados. Foram alunas atentas e realizaram sempre as tarefas propostas quer na aula quer como trabalho de casa. A sua participação foi consistente com a motivação demonstrada. Referem que gostam da matemática e de novos desafios apesar das dificuldades que estes lhes trazem. Os seus desempenhos a nível dos testes sumativos no 1.º período foram positivos.

Apresento agora resumidamente as alunas do 2.º grupo:

A Maria é interessada e motivada, mas não é constante na participação e atenção em sala de aula. Tem resultados fracos, mas gosta de aprender e de desafios sendo, no entanto a menos estudiosa do seu grupo. Nem sempre faz os trabalhos de casa, mas realiza sempre as tarefas na sala de aula. Quando se encontra motivada mostra-se interessada e trabalha com gosto sendo uma das alunas que mais participa oralmente. A Maria obteve 11 valores na disciplina de Matemática.

A Carolina é a que apresenta mais dificuldades neste grupo. É muito ansiosa e essa ansiedade reflete-se em sala de aula. No entanto, é muito interessada e motivada para aprender, mas não apreende os conceitos facilmente. Faz os sempre os trabalhos propostos, mas com uma certa dificuldade e nem sempre corretamente, sendo a que tem pior nota do grupo. Obteve 10 valores no final do 1º período.

A Francisca é a das três a que tem melhores resultados. É interessada, mas nem sempre se mostra motivada para o tema que está a ser lecionado. É muito pouco comunicativa e consequentemente é a das alunas que menos participa em aula. Realiza sempre as tarefas propostas. Demonstra uma grande insegurança nos seus conhecimentos sendo visível o seu esforço para ter bons resultados. No final do 1.º período a Francisca teve 14 valores fruto do seu esforço e trabalho.

A fim de garantir a privacidade dos alunos os nomes aqui utilizados são fictícios.

3.7 - ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS

Para Bodgan e Biklen (1994, p.205), a análise de dados "é o processo de busca e de organização sistemática de transcrições de entrevistas, (...) e de outros materiais que foram acumulados, com o objetivo de aumentar a sua compreensão desses próprios materiais".

Ainda segundo os mesmos autores, a tarefa de interpretar e dar sentido aos dados é algo grandioso. Assim sendo, após a recolha de dados todo o material foi cuidadosamente analisado, para que nada de crucial e importante faltasse nas transcrições e para que não se perdesse nenhuma informação importante no estudo. Foram também analisadas as dificuldades, avanços e recuos dos alunos durante a realização dos relatórios, resolução dos problemas e realização dos testes sumativos.

Posteriormente, os relatórios realizados pelos grupos forma avaliados segundo determinados parâmetros (ver anexo 4).

Por fim, analisou-se as entrevistas para determinar os sentimentos e opiniões dos alunos acerca da abordagem exploratória a que foram submetidos.

4 - INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Neste capítulo faz-se referência às atividades que concretizei no decorrer da investigação realizada durante a elaboração deste trabalho. Seguidamente apresentam-se os resultados e a análise dos mesmos.

4.1 - GRUPO 1

O grupo 1 é constituído pela Vanda, pelo Pedro e pelo Manuel. Este grupo caracteriza-se pelo bom desempenho dos seus elementos, quer nos testes quer nas aulas e caracteriza-se ainda pela vontade que todos demonstram em aprender.

VANDA

A Vanda tinha quinze anos de idade no início do ano letivo 2014/2015 e estava a frequentar o décimo ano pela primeira vez. No ano letivo anterior foi considerada como uma aluna com bom desempenho a Matemática, tendo obtido, no fim do ano letivo, a classificação 4. As suas disciplinas preferidas são Biologia, Matemática e Filosofia.

Neste ano tem tido bom aproveitamento a todas as disciplinas, a Matemática em particular obteve 14 valores no 1º período e 15 valores no 2º período. Quando questionada se pretende continuar os estudos após terminar o ensino secundário a Vanda responde afirmativamente confessando que o seu sonho é ser médica.

Em sala de aula, a Vanda é uma aluna com facilidade de expressão, tanto oral como escrita, que gosta de aprender e de enfrentar novos desafios, que gosta de participar e coloca sempre as dúvidas quando estas aparecem. Colabora sempre de um modo muito empenhado em todas as tarefas e, quando é solicitada. É uma aluna atenta, interessada e trabalhadora, com bom comportamento e, para além das tarefas da aula, resolve os trabalhos de casa propostos. Gosta das aulas nos moldes atuais, onde predominam as aulas expositivas feitas pela docente da disciplina com resolução de exercícios do manual com participação oral por parte dos alunos, no entanto admite que gostava de ver introduzidas mais tarefas exploratórias e de pesquisa.

PEDRO

Pedro tinha quinze anos de idade no início do ano letivo 2014/2015 e estava a frequentar o décimo ano pela primeira vez. No ano letivo anterior foi considerado o melhor aluno da sua turma a Matemática, tendo obtido a classificação de 4 valores.

Refere que a Matemática foi até este ano a sua disciplina preferida, no entanto, este ano a sua preferência recaiu sobre a Biologia, mas ressalva que a Matemática continua a ser uma das suas disciplinas preferidas. Neste ano letivo tem tido bom aproveitamento a todas as disciplinas, em particular a Matemática obteve 15 valores no final do 1º período e 16 valores no final do 2º período. Pretende continuar a estudar no ensino superior, ambicionando ser médico.

Em sala de aula, o Pedro é um aluno extrovertido com facilidade de expressão, que gosta de aprender e de enfrentar novos desafios. O Pedro participa de um modo muito empenhado em todas as tarefas e gosta de participar na discussão dos resultados, expondo com facilidade as suas opiniões. É um aluno atento, interessado, trabalhador e com bom comportamento. Gosta das aulas nos moldes atuais mas gostava que houvesse um incremento nas apresentações orais.

MANUEL

O Manuel tinha quinze anos no início do ano letivo 2014/2015 e era a primeira vez que frequentava o décimo ano.

No ano letivo anterior foi considerado como um aluno com um bom desempenho a Matemática, tendo obtido a classificação 4. Afirma que sempre gostou de Matemática por ser uma das disciplinas que mais o estimula a nível intelectual uma vez que há sempre novos desafios a resolver.

Este ano letivo o Manuel tem tido um aproveitamento razoável a Matemática que fica muito aquém das suas capacidades, tendo obtido 13 valores no 1º período e 14 valores no 2º período. As disciplinas de que mais gosta é de Matemática e de Biologia. Pretende continuar a estudar no ensino superior pretendendo estudar "Ciências Forenses".

Em sala de aula, o Manuel é um aluno muito perspicaz, muito empenhado em todas as tarefas propostas. Participa sempre que solicitado na apresentação dos resultados expondo com facilidade as suas opiniões. É um aluno com bom comportamento e atento, mas apesar de ser trabalhador em sala de aula, não o é em casa o que se reflete nas suas notas, pois só estuda no dia anterior ao teste sumativo. Gosta de novos desafios e demonstra uma grande curiosidade quando se encontra perante novas situações.

Gosta das aulas nos moldes atuais, contudo acha que poderia ser vantajosa a implementação dos instrumentos de avaliação alternativos por nós trabalhados.

4.1.1 - INVESTIGANDO A FUNÇÃO QUADRÁTICA

Esta foi a primeira tarefa proposta aos alunos, tendo sido realizada em sala de aula na presença da investigadora e da professora titular. Esta tarefa teve como objetivo iniciar os alunos no estudo da função quadrática, baseando-se apenas nos conhecimentos já adquiridos pelo estudo da função afim (estudo também realizado em sala de aula) e pela frequência da disciplina em anos letivos anteriores.

Assim sendo, elaborou-se uma ficha de trabalho com oito questões (Anexo 5). Em cada questão foi apresentada uma função, sendo pedido aos alunos que elaborassem o seu gráfico e que estudassem o seu comportamento. Na primeira questão foi apresentado um polinómio do 2.º grau incompleto sem a componente de termo independente e de termo de primeiro grau, indo-se aumentando gradualmente a sua complexidade nas questões seguintes.

Apesar de na ficha de trabalho não ter sido indicada a obrigatoriedade do uso da calculadora, foi pedido a todos os alunos (ou pelo menos a cada um dos grupos) que recorressem ao seu uso no desenvolvimento da tarefa.

De referir ainda, que no momento da realização desta tarefa, para a maioria dos alunos este seria também o primeiro contacto com a calculadora gráfica, uma vez que até esta data os conteúdos abordados nas aulas não contemplavam o uso da calculadora.

No entanto, decorridos 40 minutos após o início da tarefa a maioria dos alunos não tinham encontrado estratégias para a resolução das tarefas propostas e por essa razão, a professora resolveu todas as questões da 1 à 7 com a colaboração oral dos alunos em grande grupo, com o objetivo de os orientar para a questão 8. Nessa questão, os alunos tinham que explorar o comportamento e o gráfico de uma função quadrática do tipo

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

identificando o significado e os efeitos dos parâmetros *a*, *h* e *k*, em que *a, h e k* são números reais, após o que deveriam elaborar um relatório, o qual seria sujeito a avaliação por parte da professora e da investigadora.

De referir que neste primeiro relatório foi permitido aos alunos que o levassem para casa, podendo apresenta-lo posteriormente escrito em computador.

Uma vez que os alunos nunca tinham utilizado a calculadora gráfica, foi necessário o auxílio da investigadora e da professora que os apoiaram através da explicação da introdução e do funcionamento de vários comandos que seriam necessários ao desenvolvimento da tarefa. Alguns destes comandos traduziram-se na definição da janela de visualização, na forma como introduzir uma função e como visualizar a respetiva representação gráfica. Neste processo instrumental, alguns alunos sentiam-se pouco à vontade e procuraram recorrer aos procedimentos algébricos a que estavam habituados. A Vanda perguntou se poderiam fazer as tarefas sem recorrer à calculadora, *Vanda: Professora temos mesmo que utilizar a calculadora?*

Investigadora: Porquê Vanda?

Vanda: Vamos demorar imenso tempo... preferíamos fazer 'à mão'!

Apesar do auxílio dado acerca do funcionamento da calculadora, este grupo apresentou uma certa resistência inicial, tendo optado por fazer o estudo proposto recorrendo apenas aos procedimentos algébricos nomeadamente nas representações gráficas, para as quais optaram por recorrer ao cálculo aleatório de algumas coordenadas do gráfico de forma a facilitar a representação utilizando papel milimétrico para a construção do gráfico, no entanto nesta representação não tiveram a preocupação de calcular nem os pontos críticos, zeros, extremos ou vértice.

Quando questionados sobre o porquê de tal opção metodológica, ou seja, preferir os procedimentos algébricos, os três alunos afirmaram que por hábito era assim que faziam e que nem se lembraram de utilizar a calculadora:

Investigadora: Porque foste calcular os zeros assim?

Vanda: Assim como?

Investigadora: Poderias ter recorrido à calculadora...nem que fosse para verificar os resultados, o que não fizeste...

Vanda: Estou habituada a fazer assim! Demorava muito mais tempo se fosse fazer na calculadora.

No entanto, na realização desses cálculos e ao pretenderem, por exemplo, calcular o valor da função f no ponto $x = \frac{1}{2}$ os alunos utilizaram a seguinte representação:

$$f(x) = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2}\right)^2 - 3$$

Quando foram questionados se na opinião deles, aquela forma de representar estava correta, todos responderam que sim. Apesar de saberem o que é necessário fazer para obter a imagem de *x*, quando este toma um determinado valor, os alunos interpretaram *f(x)* como uma entidade abstrata não sentindo necessidade de aí substituir *x* pelo valor cuja imagem pretendem determinar (neste caso ½). Relembramos que este tipo de cálculo já tinha sido realizado na aula pela professora titular, na resolução das questões iniciais (1 a 7).

Mesmo assim, os alunos não recorreram aos "novos" conhecimentos tentando reproduzir aqui neste estudo da função quadrática, o que aprenderam para as funções afins, nas quais basta determinar dois pontos para esboçar de forma rigorosa o gráfico da função, mostrando que ao serem confrontados com conteúdos ou tarefas mais complexas, tentam resolver fazendo uma conexão com conteúdos já seus conhecidos.

Ao lhes ser apresentada uma função onde os parâmetros estão representados por letras, os alunos questionaram a professora sobre as estratégias a seguir para responder às questões colocadas. De referir que na questão 3 (realizada em grande grupo com a colaboração da professora) já se havia estudado a influência que o parâmetro a tinha na representação gráfica de uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2$.

Foi-lhes então sugerido que atribuíssem diferentes valores aos parâmetros *a*, *h* e *k* analisando a nível gráfico as funções assim obtidas, nomeadamente quanto ao eixo de simetria, às coordenadas do vértice da parábola, à existência e ao número de zeros, ao sentido da concavidade e à paridade. Com este apoio o grupo conseguiu arranjar as suas próprias estratégias, tendo optado por fixar dois dos parâmetros e variar o terceiro por forma a conseguir perceber quais os efeitos que cada um provocava isoladamente. Esta estratégia mostrou-se adequada pois os alunos conseguiram perceber qual o efeito que cada um dos parâmetros tinha na função dada. Começaram por fixar *h=3* e *k=2* e fizeram variar *a (a=2, -2 e 5)*, tendo com sucesso descrito que o vértice das diferentes parábolas tinha sempre as mesmas coordenadas, o par ordenado *(3,2)* e o eixo de simetria seria a reta de equação *x=3*. Referiram ainda que o sentido da concavidade estava ligado ao sinal do parâmetro *a* tendo concluído pela análise do gráfico que, se o vértice é o mesmo, então quando a concavidade de duas parábolas está 'voltada na mesma direção', o contradomínio de ambas também coincide.

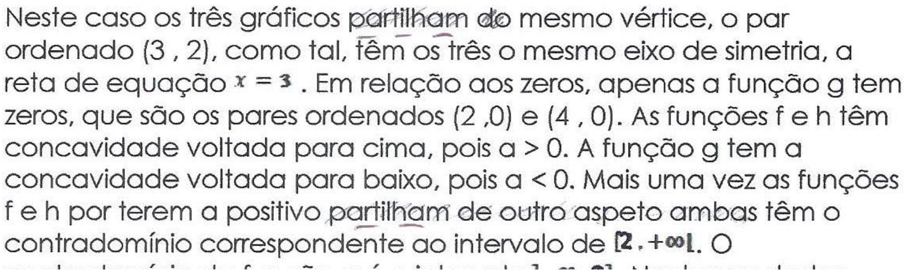

Neste caso os três gráficos partilham do mesmo vértice, o par ordenado (3 , 2), como tal, têm os três o mesmo eixo de simetria, a reta de equação $x = 3$. Em relação aos zeros, apenas a função g tem zeros, que são os pares ordenados (2 ,0) e (4 , 0). As funções f e h têm concavidade voltada para cima, pois a > 0. A função g tem a concavidade voltada para baixo, pois a < 0. Mais uma vez as funções f e h por terem a positivo partilham de outro aspeto ambas têm o contradomínio correspondente ao intervalo de $[2 , +\infty[$. O

Figura 1 – Variação de *a* no estudo da função quadrática (Grupo 1)

De seguida fixaram os parâmetros *a=3* e *k=1* e fizeram variar *h*, reconheceram que para cada função, o vértice e o eixo de simetria estariam correlacionados, no entanto faltou referir que a equação do eixo de simetria é definida pelo valor de *h*, isto é, que o eixo de simetria é definido por *x=h.*

Já os significados dos parâmetros a e k parecem estar mais consolidados uma vez que referem que nenhuma das funções que consideraram têm zeros devido a *a (=3)* ser positivo e *k=1*.

Neste caso a parábola correspondente à função f tem vértice em (0,5; 1), o gráfico da função g tem vértice em (-2 , 1) e a parábola correspondente à função h tem vértice em (2,5 ; 1), visto que todos os gráficos das funções têm as abcissas dos vértices diferentes terão também eixos de simetria diferentes sendo eles $x = 0{,}5$; $x = 2$; $x = 2{,}5$ respetivamente às funções f, g e h. Nenhuma destas três funções têm zeros devido ao facto de k = 1 e de a ser positivo. Em relação à concavidade todas as funções têm concavidade igual e voltadas

Figura 2 – Variação de *h* no estudo da função quadrática (Grupo 1)

Quando fixaram *a(=3)* e *h(=1)* e fizeram variar *k(=3; 4 e -1)*, voltaram a associar o vértice das diferentes parábolas com o eixo de simetria e reconheceram que a abcissa do vértice seria sempre a mesma. No entanto, não fizeram nenhuma referência à possibilidade de a ordenada do vértice estar ligada à variação de *k* e apesar de terem indicado de forma correta o contradomínio de cada função, não evidenciaram nenhuma associação entre o contradomínio, a ordenada do vértice e/ou o parâmetro *k*.

Neste caso a parábola correspondente à função f tem vértice em (-1 ; -3), o gráfico da função g tem vértice em (-1 , -4) e a parábola correspondente à função h tem vértice em (-1 ; 1), visto que todos os gráficos das funções têm as abcissas dos vértices iguais têm por isso o mesmo eixo de simetria $x = -1$. A função h não tem zeros, no entanto, as funções f e g têm os respetivos zeros, (-2 , 0) e (0 , 0), $\left(\frac{-6-4\sqrt{3}}{6}, 0\right)$ e $\left(\frac{-6+4\sqrt{3}}{6}, 0\right)$ ou $\left(\frac{2\sqrt{3}}{5} - 1, 0\right)$. Em relação à concavidade todas as funções têm concavidade igual e voltadas para cima devido a, a > 0. Estas funções não partilham do mesmo contradomínio, sendo de f o intervalo $[-3, +\infty[$, de g o intervalo $[-4, +\infty[$ e de h o intervalo $[1, +\infty[$. Nenhuma destas parábolas apresenta paridade visto que $\forall x \in D, \quad f(-x) \neq f(x)$.

Figura 3 – Variação de *k* no estudo da função quadrática (Grupo 1)

Os alunos aplicaram corretamente os conhecimentos anteriormente adquiridos e mobilizaram a informação recolhida da análise dos gráficos, de forma a conseguir responder às questões propostas. No entanto só nas conclusões, quando refletiram sobre o trabalho de forma integrada, é que salientaram algumas das relações entre os parâmetros e o gráfico da função como por exemplo:

É importante referir que para além de a, h e k também têm um significado, sendo h a abcissa do vértice, em que define o eixo de simetria e k a ordenada do vértice definindo este o ~~limite~~ máximo (a<0) ou o mínimo (a>0) do contradomínio.

Por fim, também concluimos que h e k têm diferentes efeitos, pois consoante o valor de h a parábola desloca-se para a direita, quando h é negativo, ou para a esquerda, quando h é positivo. Relativamente a k, consoante o seu valor a parabola poder-se-á deslocar para cima ou para baixo.

Figura 4 – *Conclusões* no estudo da função quadrática (Grupo 1)

Quando questionados na entrevista individual acerca da realização desta tarefa e da elaboração do respetivo relatório, os três elementos do grupo são da opinião que foi na realização do 1.º que tiveram mais dificuldades.

Pedro: O 1.º relatório foi o pior. Nem sabíamos por onde começar... ter que escrever introdução e objetivos foi mesmo muito mau professora! Já para não falar dos comentários e críticas! Depois foi ficando mais fácil!

Investigadora: Mas a vossa maior dificuldade foi na elaboração em si do relatório?

Pedro: Não... essa foi logo a primeira! Mal a professora nos deu o guião (anexo 5). Depois quando vimos que tínhamos que usar a calculadora... não gostámos muito da ideia!

Investigadora: Pois por isso é que optaram por fazer tudo analiticamente sem calculadora!

Pedro: É verdade professora! E depois houve a questão... aquelas letras! Bem... pelo menos eu pensei "não acredito...letras?". Mas depois a professora veio ter connosco e deu-nos uma ajudinha e ficou mais fácil. Nos outros relatórios já não ficámos tão assustados!

Da elaboração deste primeiro relatório e em relação ao grupo da Vanda, do Pedro e do Manuel podemos concluir que estes alunos não estão habituados a tarefas de índole mais exploratória o que provocou neles um momento de impasse pois não conseguiram sozinhos encontrar estratégias adequadas à realização da tarefa. O fraco domínio no uso da calculadora gráfica contribuiu fortemente para este tipo de situação.

Nesta primeira tarefa proposta, os alunos viram-se confrontados com inúmeros fatores desconhecidos, nomeadamente o carácter exploratório da tarefa, a realização de um relatório e a possibilidade de utilização da calculadora gráfica. Por essa razão, foi imprescindível a ajuda da professora e da investigadora para encontrar estratégias adequadas à realização da mesma.

No decorrer da tarefa foi possível observar que apesar de não ser o primeiro contacto dos alunos com este tipo de funções, uma vez que para as funções polinomiais de 2.º grau, o seu estudo já tinha sido iniciado em sala de aula pela docente da disciplina, estes demonstraram que ainda não tinham interiorizado alguns conceitos inclusive na representação correta de imagem de um ponto.

Também na redação do relatório foi notória a dificuldade que os alunos têm em expressar os seus conhecimentos com uma linguagem apropriada e percetível.

4.1.2 - PROBLEMA ÁREA MÍNIMA

O problema da área mínima (anexo 6) era dos três o que apresentava um carácter mais exploratório e que obrigava os alunos a formular as hipóteses e conjeturas a investigar. Assim sendo observou-se que este foi o problema onde os alunos do grupo 1 (a Vanda, o Pedro e o Manuel) mais dificuldades tiveram em encontrar estratégias para a sua resolução.

Neste problema os alunos tinham que determinar o ponto onde um fio de $36cm$ deveria ser cortado, de forma que quando com cada uma das partes formassem quadrados, a soma das áreas desses quadrados fosse mínima.

A primeira dificuldade sentida pelo Manuel foi a interpretação do problema e a tradução para linguagem matemática do que estavam a ler.

> *Manuel: Não estou a perceber o que se pretende no problema professora.*
>
> *Investigadora: Vamos então ler em conjunto e vai escrevendo o que vamos lendo.*

Esta dificuldade foi sentida também pelos outros alunos, a Vanda e o Pedro. Quando questionados na entrevista sobre o porquê desta dificuldade, os três alunos referem que não estão habituados a enunciados que são pouco explícitos, como os próprios reconheceram mais tarde na entrevista.

> *Investigadora: Relativamente aos problemas que propus, o que achaste? Eram fáceis, difíceis? Gostaste?*
>
> *Pedro: Eu gostei de fazer os problemas achei-os muito desafiantes! Principalmente o 1.º, nesse senti algumas dificuldades. Ao ler nem percebia o que era para fazer...por mais que lesse! Normalmente consigo sempre identificar bem as hipóteses e o que se pretende mas no 1.º problema não! Só consegui graças à ajuda da professora!*

Os outros dois alunos expressaram a mesma dificuldade e também eles referiram na entrevista que ao lerem o problema não conseguiram identificar as hipóteses e qual a estratégia a seguir. Dada a natureza exploratória e aberta deste problema parece-me importante referir que as dificuldades sentidas pelos alunos podem não estar diretamente relacionadas com os conteúdos (aprendidos há pouco tempo) a aplicar, mas sim com a natureza da tarefa (Ponte; 2005), que pode ser considerada como sendo tarefa de investigação. Neste tipo de tarefa os alunos veem-se confrontados com inúmeros desafios tais como traduzir o problema para linguagem matemática ou relacionar diferentes conteúdos. De referir que apesar de a Professora titular reconhecer os benefícios da inclusão deste tipo de tarefa em sala de aula, dada a extensão do programa curricular, esta foi a primeira vez que estes alunos se viram confrontados com uma tarefa "de investigação" apresentada em forma de problema. Na resolução deste tipo de tarefa os alunos veem-se obrigados a uma maior abstração dos conceitos aprendidos. No entanto, esta passagem do concreto para o abstrato é uma das grandes dificuldades sentidas pelos alunos no ensino da

Matemática. Tal como podemos constatar nesta tarefa os alunos quando confrontados com questões onde têm que fazer algo mais do que operacionalizar os conteúdos aprendidos necessitam de auxilio não só para interpretar o enunciado como também para encontrar estratégias para a resolução.

Depois da leitura conjunta aluno-investigadora, a Vanda e o Manuel ainda tiveram problemas na sua interpretação. A Vanda considerou inicialmente que o quadrado 1 e o quadrado 2 tinham o mesmo perímetro.

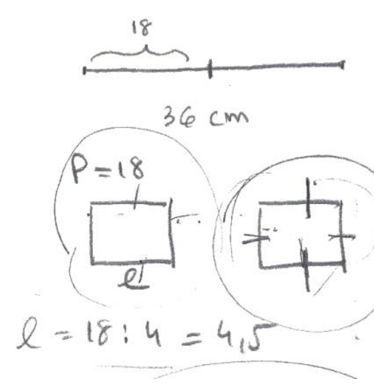


Figura 5 – Representação inicial dos quadrados (Vanda)

Investigadora: Explica-me lá o que fizeste aí?

Vanda: Então tenho um fio e uma vez que tem 36cm e eu quero dividi-lo fiz 36 a dividir por 2 e deu-me 18cm para cada lado logo cada lado dos quadrados tem 4,5cm.

Investigadora: Mas está escrito em algum sítio que os quadrados são iguais?

Vanda: Não...mas podem ser não podem professora?

Investigadora: Isso é o que temos que ir descobrir através da resolução do problema.

Vanda: Então como vou fazer? Vou considerar que são diferentes?

Após a leitura conjunta (investigadora e Vanda) do problema a aluna conseguiu encontrar uma estratégia a seguir. Apesar de a estratégia seguida não permitir responder diretamente às questões colocadas, a Vanda conseguiu traduzir para linguagem matemática o problema, chegando mesmo a obter um valor para o comprimento do lado do quadrado. Dos três alunos a Vanda foi a única que conseguiu traduzir o problema para linguagem matemática, sem auxilio da investigadora. No entanto, e apesar de ter conseguido um valor para o comprimento do lado do quadrado conseguindo obter a área do quadrado, a hipótese de área mínima requerida não estava garantida. Para esta passagem do concreto para o abstrato a Vanda necessitou do auxílio da investigadora. Tendo partido de um exemplo concreto para depois generalizar.

Quer o Manuel quer o Pedro também pensaram na mesma estratégia que a Vanda, mas não chegaram a formular as hipóteses, não nos deixando perceber se se mantinha a dificuldade sentida no relatório de passagem para linguagem matemática do problema.

Após um período de impasse no qual nenhum dos três alunos conseguia avançar a investigadora optou pela leitura conjunta do problema, pedindo aos alunos que lessem o problema e escrevessem as hipóteses dadas no enunciado. Essa estratégia mostrou-se eficaz pois os alunos conseguiram formular as hipóteses como era pretendido.

O Manuel escreve na sua folha:

$$36 = P_1 + P_2$$
$$P_1 = 4x$$
$$P_2 = 4y$$

Figura 6 – Formulação inicial do problema relativamente ao perímetro (Manuel)

Investigadora: Muito bem! Mas ainda podemos escrever isso numa forma mais simpática não? E ainda falta uma das hipóteses

Manuel: Ah! Sim claro, a parte das áreas. Fica assim não é professora?

O Manuel escreve,

$$36 = 4x + 4y$$
$$A_{total} = x^2 + y^2$$

Figura 7 – Formulação do problema relativamente à área (Manuel)

Para continuar a resolução do problema, era necessário que os alunos obtivessem uma função da área como função de uma única variável. Foi esta etapa da resolução do problema que maior dificuldade trouxe aos três alunos. Confrontados com as hipóteses do problema, foi necessário a intervenção da investigadora para que os alunos conseguissem encontrar uma estratégia para poder avançar na resolução.

[Após escrever as hipóteses o Pedro ficou a olhar para a investigadora com um olhar inquiridor.]

Investigadora: O que se passa?

Pedro: Não percebo o que podemos fazer agora... temos que 36 é igual a 4 vezes x (que representa o lado do quadrado 1 para o Pedro) mais 4 vezes y (que representa o lado do quadrado 2 para o Pedro) mas como saímos daqui? Da *área também só temos que a soma das áreas é x ao quadrado mais y ao quadrado e que tem que ser mínima...*

Investigadora: Achas que não? Olha bem para o que tens... não achas que poderemos representar essa equação do perímetro doutra forma?

Pedro: Como professora?

Investigadora: Então e se escrevesses uma das incógnitas em função da outra?

Pedro: O quê?

Investigadora: Pensa lá bem...em vez de 36 é igual a 4 vezes x mais 4 vezes y não podemos escrever que x é igual a 36 menos 4 vezes y tudo a dividir por 4?

Pedro: Podemos...

Porém, Pedro não compreende bem como fazer, pois escreve x em função de y e depois y em função de x:

$$36 = 4x + 4y \Leftrightarrow 36 - 4y = 4x \Leftrightarrow \frac{36-4y}{4} = x \Leftrightarrow 9 - y = x$$

$$36 = 4x + 4y \Leftrightarrow 36 - 4x = 4y \Leftrightarrow \frac{36-4x}{4} = y \Leftrightarrow 9 - x = y$$

Figura 8 – Formulação do problema relativamente ao perímetro (Pedro)

Investigadora: então Pedro o que estás a fazer? Se fizeres essas duas substituições achas que chegas a algum resultado que possas utilizar?

Pedro: tem toda a razão professora! que tontice!

A Vanda e o Manuel também tiveram dificuldade em perceber o que se pretendia, no entanto com o auxílio da investigadora ambos escreveram bem a equação. AVanda acabou por fazer a seguinte representação:

$$\begin{cases} 4x = 36 - 4y \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{36 - 4y}{4} \\ \text{—} \end{cases}$$

Figura 9 – Continuação da formulação do problema relativamente ao perímetro (Vanda)

Ultrapassada esta dificuldade, e depois de uma das variáveis estar escrita em função da outra os alunos conseguiram escrever a expressão correspondente à soma das áreas em função apenas de uma variável.

$$36 = 4x + 4y \Leftrightarrow \frac{36-4x}{4} = \frac{4y}{4} \Leftrightarrow 9 - x = y$$

$$A_{total} = x^2 + y^2 = x^2 + (9-x)^2 = x^2 + x^2 - 18x + 81 =$$

$$= 2x^2 - 18x + 81 = A$$

Figura 10 – Continuação da formulação do problema relativamente à área (Manuel)

Esta dificuldade sentida pelos alunos em conectar (relacionar) os conteúdos aprendidos em anos anteriores acerca de sistema de equações e o problema proposto deve-se à necessidade sentida pelos alunos em compartimentar os conteúdos aprendidos não sendo capazes de fazer a ponte entre eles, tornando-se nesta fase evidente que os alunos ainda se encontravam numa fase de interiorização dos novos conceitos aprendidos.

[Confrontados com a expressão da área os alunos olharam para a investigadora]

Investigadora: O que se passou Pedro?

Pedro: Já tenho a expressão da área. Mas e agora?

Investigadora: Lê lá o enunciado! O que nos é pedido?

Pedro: Que a área seja mínima.

Investigadora: E então?...

[O Pedro olha para a investigadora com um ar pensativo e encolhe os ombros]

Investigadora: Olha bem para a expressão que obtiveste...

[Pedro olha para a sua folha]

Investigadora: Não te é familiar a expressão?

Pedro: Não...

Investigadora: Olha bem ...

[Depois de uns breves instantes a olhar o Pedro responde]

Pedro: É uma função quadrática?

Investigadora: Claro que sim...mas porque é que não conseguias ver?

Pedro: Sei lá...acho que não estava à espera neste contexto que me aparecesse uma função quadrática.

Apesar de terem conseguido chegar à expressão pretendida para representar a área , quer o Pedro quer os colegas não se aperceberam que a área era representada por uma função quadrática, provavelmente porque usualmente nos problemas envolvendo áreas, a sua expressão algébrica é dada por lado vezes lado. Uma vez mais, a compartimentação que os alunos fazem dos diferentes conteúdos da matemática torna-se aqui evidente, e portanto quando aparece a área do quadrado dada sob a forma de uma função quadrática os alunos não a reconhecem.

Quando questionados acerca do porquê dessa dificuldade os alunos deram respostas idênticas, que no contexto do nosso problema não estavam à espera que aparecesse uma função quadrática. Uma questão colocada no seguimento desta conversa da investigadora a cada aluno foi para pensarem no que era afinal uma área, independentemente de ser neste problema ou noutro qualquer:

Investigadora: Mas pensa lá bem. Quando temos uma área estamos perante uma função de que tipo?

Pedro: Bem ... (hesita um pouco) uma função quadrática?

Investigadora: Claro...

Perante esta dificuldade sentida pelos alunos e tal como já foi referido, apercebemo-nos que os três alunos ainda estão numa fase de interiorização do conceito de função polinomial de 2º. grau. não conseguindo estabelecer relações entre as diferentes representações.

Depois de reconhecerem com o auxílio da investigadora, que a soma das áreas representava uma função quadrática, os alunos foram capazes de avançar para a etapa seguinte, fazendo a ligação com o cálculo do mínimo ou máximo de uma função quadrática, onde teriam de calcular o vértice da parábola. Nenhum dos três alunos teve qualquer dificuldade em obter o vértice, tendo-o calculado a partir da representação da função na forma $f(x) = a(x - a)^2 + k$, conforme o trabalho anteriormente realizado em sala de aula. Após o reconhecimento da área como uma função quadrática os alunos já foram capazes de aplicar os conhecimentos estudados no relatório e em sala de aula da função quadrática, evidenciando a apreensão e interiorização correta dos conceitos de vértice, mínimo e máximo. No entanto, quando lhes é pedido que apliquem esses conhecimentos num contexto diferente do que estão habituados a trabalhar,como é o caso do cálculo da área do quadrado, eles não são capazes de o fazer. Essa dificuldade de passar de uma representação de função para outra função tem sido estudada por diferentes autores …

Nesta fase do problema já nenhum se lembrava do que era pedido de início e portanto ao terem obtido o vértice da parábola deram por concluído o problema.

Investigadora: Então já acabaste?

Manuel: Já! Já sei que o vértice é em (9/2, 81/2)

Investigadora: Então o mínimo da função é atingido onde?

Manuel: Em (9/2, 81/2)

Investigadora: Mas não era só isso que era pedido pois não?

Manuel: Até já me tinha esquecido do que era para fazer... agora temos que saber onde cortar o fio não é?

Investigadora: De forma a quê?

Manuel: Que se consigam formar dois quadrados.

Investigadora: E então o que falta?

Neste ponto do problema apenas o Pedro conseguiu perceber sozinho qual a ligação do mínimo calculado com o ponto onde cortar o fio. Quer o Manuel quer a Vanda precisaram da ajuda da investigadora:

Investigadora: Então Vanda a que conclusão chegaste?

Vanda: Que o fio terá que ser cortado em (9/2,81/2)

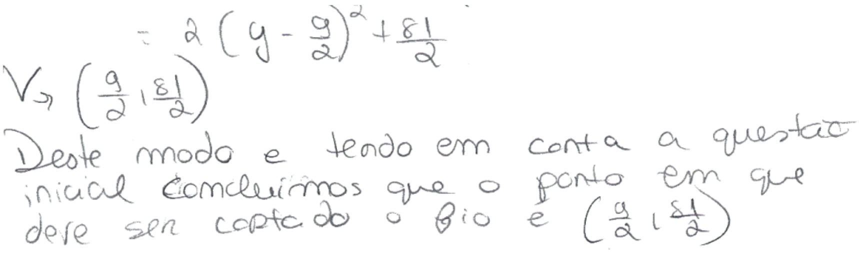


Figura 11 – Conclusão do problema (Vanda)

Investigadora: Vê lá bem com atenção o que estás a dizer... temos um fio. Imagina que o fio é esta caneta [a investigadora pega numa caneta]. Como cortas o fio no ponto (9/2,81/2)?

Vanda: Pois...não sei!

Investigadora: Então o ponto não deve ser esse pois não?

Vanda: Não.

Investigadora: Então o que te parece que é o 9/2?

Vanda: O minimo

Investigadora: Sim e que representa?

[A Vanda fica a olhar para a investigadora.]

Investigadora: Lê com atenção o enunciado do problema e vê com atenção o que fizeste até aqui.

Vanda : Representa o y?

Investigadora: E o y representa o quê?

Vanda: O lado do quadrado.

Investigadora: Então o que concluimos? Onde temos que cortar o fio?

Vanda: Como o quadrado tem quatro lados temos 4 vezes 9/2 e por isso temos que cortar o fio para fazer o primeiro quadrado nos 18cm.

A resolução deste problema, trouxe à luz informações importantes acerca do conhecimento matemático dos alunos e das suas dificuldades em resolver este tipo de problemas.

Uma das dificuldades sentidas pelos alunos foi logo no ínicio, quando após a leitura do problema não conseguiam formular as hipóteses. Tal como já se referiu atrás, esta dificuldade deve-se à forma de como este problema é apresentado, onde, quer as hipóteses existentes quer a questão a ser estudada não se encontra descrita explicitamente, obrigando os alunos a um raciocínio mais elaborado e menos centrado num tema específico.

Outro momento de impasse sentido foi quando obtiveram duas equações com duas variáveis, não sabendo como prosseguir o problema. O tipo de raciocínio que era necessário nesta etapa é pouco usual no trabalho que os alunos desenvolvem no contexto de aula. Apesar de já terem manipulado resoluções algébricas que envolvem raciocínios semelhantes não conseguiram transferir essas competências para este caso concerto. Mesmo perante uma situação que é traduzida por um sistema de equações, tiveram dificuldades em identificar procedimentos algébricos que lhes permitissem resolver o problema com sucesso. Este facto parece indiciar que há procedimentos e processos que são típicos de determinadas situações matemáticas, não se vislumbrando a capacidade de aplicação dos conhecimentos adquiridos a novas situações e problemas.

Por fim, outro momento marcante da resolução deste problema foi a altura de produzir uma resposta. Após calcularem qual o valor onde a função quadrática era mínima, tendo utilizado o cálculo do seu vértice, os alunos consideraram que esse ponto era a resposta. Os alunos não conseguem relacionar os processos e procedimentos algébricos com o contexto do problema. Este facto deve-se à extensão e complexidade do problema, que levou a que o objetivo retido por parte dos alunos fosse o de calcular o mínimo de uma função. Uma vez cumprido, nenhum dos alunos se lembrava que a resposta pedida não era qual a àrea mínima mas sim o ponto onde cortar o fio de forma a que a soma da área dos quadrados fosse mínima. Chamados à atenção para este facto, a Vanda e o Manuel ainda tiveram um momento de hesitação. Para conseguirem dar a resposta correta foi necessário aos dois alunos conseguirem compreender o que representa o ponto que se obtém quando se calcula o vértice, e perceber que neste caso o valor seria o valor da medida do lado de um dos quadrados. Faltava ainda relembrar que o quadrado tem quatro lados e por isso ter-se-ia que fazer quatro vezes o lado, e aí sim obtemos o ponto onde cortar o fio.

Em situação de entrevista quando questionados acerca da dificuldade deste tipo de problemas, os três alunos referem que este primeiro problema foi especialmente difícil mas que mesmo assim, gostaram de o fazer.

> *Investigadora: Dos três problemas qual foi o que achaste mais dificil?*
>
> *Manuel: Para mim foi sem dúvida o 1.º problema, mas apesar disso foi o que gostei mais de fazer!*
>
> *Investigadora: Porquê?*
>
> *Manuel: Porque foi aquele que mais me desafiou...acho que em parte a dificuldade que senti deveu-se a estar habituado a que um problema se centre só numa matéria e quando é necessário pensar em mais que um tema é complicado...a maior parte das vezes nem me lembro de fazer a ligação das coisas! Quem iria imaginar de que podia juntar a parte da geometria com as funções?!*

Relativamente às tarefas propostas os alunos corroboram a ideia defendida atrás, da sua dificuldade em relacionar conteúdos ficando “presos” a ideias pré-concebidas adquiridas através da realização dos exercícios e problemas típicos.

Relativamente à função quadrática pode-se dizer houve uma evolução na aprendizagem por parte da Vanda, o Pedro e o Manuel, no entanto, vêm e trabalham com funções segundo uma perspetiva operacional ainda não sendo capazes da abstração necessária para verem a função numa conceção estrutural.

4.1.3 - INVESTIGANDO A FUNÇÃO MÓDULO

O objetivo da 2.ª tarefa exploratória era os alunos estudarem a função módulo, sendo que este foi o primeiro contacto que eles tiveram com uma função deste tipo. A ideia era eles explorarem todas as propriedades deste tipo de funções tendo apenas o auxílio da calculadora gráfica. Assim sendo, foi proposto aos alunos esboçarem o gráfico da função módulo. Pretendia-se que compreendessem o que acontece ao gráfico da função quando sofre translações quer no eixo das abcissas quer no eixo das ordenadas.

Uma vez mais foi necessário o auxílio da investigadora e da professora para apoiarem os alunos na utilização da calculadora gráfica, através da explicação da introdução e do funcionamento de vários comandos que seriam necessários ao desenvolvimento da tarefa. Alguns destes comandos traduziram-se na definição da janela de visualização, na forma como introduzir uma função e como visualizar o respetivo gráfico.

Tendo obtido o gráfico na calculadora gráfica e após a sua reprodução no relatório, a Vanda, o Pedro e o Manuel sentiram algumas dificuldades em analisar as situações propostas na tarefa, tal como podemos constatar nos comentários feitos:

> *Pedro: Professora, já temos o gráfico da função módulo e agora o que fazemos?*
>
> *Investigadora: Vamos lá ler o que nos pedem*

[A investigadora procede à leitura da 2.ª alínea juntamente com o grupo]

> *Investigadora: Vamo-nos concentrar no caso das translações dos eixos das abcissas. O que vos aprece que nos estão a pedir?*
>
> *Vanda: Translações no eixo das abcissas faz-me lembrar matéria da quadrática...*
>
> *Investigadora: Certo. E o que estudámos na quadrática?*
>
> *Pedro: Ah! É só isso professora? É só dizermos que quando sofre translações no eixo das abcissas é quando sofre translações segundo o vetor de coordenadas (h,0) e portanto desloca-se para a esquerda ou para a direita? É professora?*

Ultrapassado este primeiro momento de indecisão e depois de conseguirem estabelecer uma relação entre a translação da parábola e o pedido na tarefa, os alunos conseguiram arranjar estratégias adequadas à exploração da tarefa não tendo recorrido mais à ajuda da investigadora.

Ao contrário do que aconteceu no estudo da função quadrática, na resolução das questões seguintes os alunos recorreram ao auxílio da calculadora gráfica para a visualização dos gráficos das diferentes funções módulo.

Os alunos interpretaram corretamente as translações sofridas pelo gráfico da função módulo, tendo identificando que a translação segundo o vetor de coordenadas *(h,0)* traduz-se num deslocamento horizontal e compreendido que se o *h>0* (vetor $(-h,0)$) ou *h<0* (vetor (h,0)) o deslocamento será para a esquerda ou para a direita respetivamente.

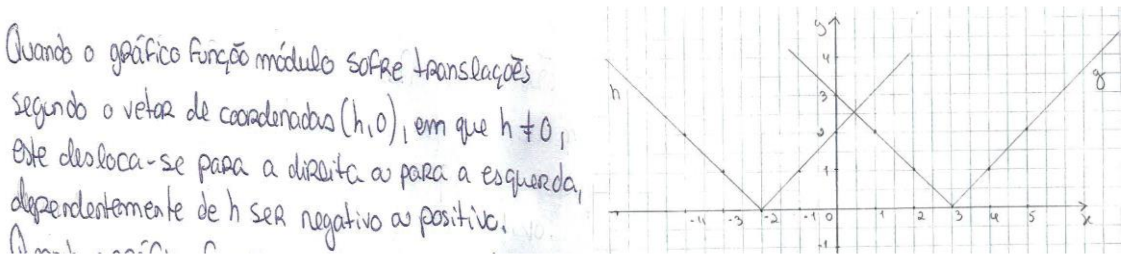


Figura 12 –Translações horizontais do gráfico da função módulo (Grupo 1)

De forma análoga quando a translação é realizada segundo o vetor de coordenadas *(0,k)* o deslocamento que o gráfico sofre é realizado na vertical sendo para cima ou para baixo dependendo se o *k* é positivo ou negativo.

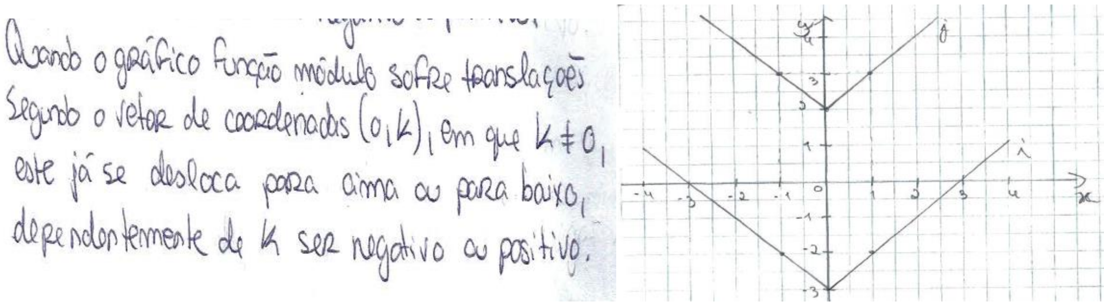


Figura 13 – Translações verticais do gráfico da função módulo (Grupo 1)

Após a visualização dos diferentes gráficos na calculadora gráfica, os alunos foram capazes de fazer a analogia do que foi estudado para a função quadrática em sala de aula relativamente às translações sofridas pelo gráfico de uma função segundo um vetor.

Na última questão da tarefa era proposto aos alunos estudarem o efeito do parâmetro *a* quando este era multiplicado pela função módulo em duas situações distintas, quando *a* varia entre 0 e 1 e quando *a* toma valores superiores a 1.

Para responder a esta questão, os alunos apresentaram como estratégia a comparação das funções módulo, uma com *a* a variar entre 0 e 1 e outra com *a >1*, com a função módulo em que *a=1* (função considerada na primeira questão do relatório). Desta comparação os alunos apresentaram conclusões acerca da influência do parâmetro a relativamente à abertura da concavidade do módulo.

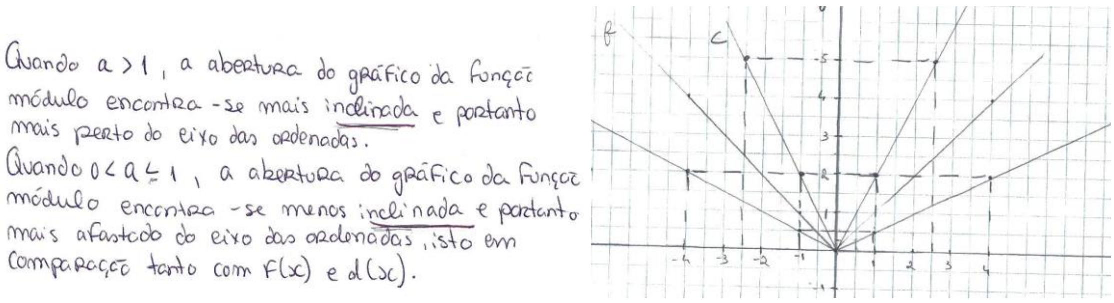


Figura 14 – Variação de *a* no estudo da função módulo (Grupo 1)

Nesta análise, os alunos falam da inclinação do gráfico da função módulo. Ao falar de inclinação, os alunos estariam a pensar em declive de uma reta ou semirreta, ou seja, ao confrontarem-se com uma função cuja representação gráfica se assemelha a duas semirretas, utilizaram termos aprendidos aquando do estudo das retas e semirretas (“ a função módulo encontra-se mais inclinada…”). No entanto, os alunos conseguem analisar a influência do parâmetro *a* demonstrando compreender corretamente qual a sua influência na abertura do gráfico da função módulo.

Mesmo não conhecendo os termos corretamente utilizados quando se fala da função módulo, ao conseguirem estabelecer uma ponte de ligação entre os conteúdos já estudados, os alunos demonstraram ter compreendido o efeito que a translação segundo um vetor *(h,k)* ou a alteração de um parâmetro multiplicativo provoca no gráfico, seja este de uma função quadrática ou de uma função módulo.

Analisando as conclusões que os alunos tiraram e da analogia feita entre o gráfico da função módulo e um gráfico de duas semirretas somos levados a questionarmo-nos se os alunos compreenderam o verdadeiro conceito da função módulo, que transforma qualquer função negativa em positiva. Por outro lado, podemos observar uma evolução da conceção do conceito de função uma vez que foram capazes de aplicar os conhecimentos estudados na função quadrática nesta tarefa, conseguindo responder corretamente às questões formuladas.

Relativamente à elaboração do relatório, este grupo apresentou melhorias tendo descrito e explicado de forma sucinta os passos do trabalho e apesar de irem descrevendo algumas das conclusões obtidas em cada passo, não escreveram as conclusões globais do trabalho realizado.

Importa ainda referir que para este grupo esta tarefa foi a primeira onde utilizaram a calculadora gráfica tendo conseguido resolver as questões colocadas sem grande dificuldade, apesar da resistência da Vanda à sua utilização.

4.1.4 - PROBLEMA O VOO DOS GANSOS

No 2.º problema “O voo dos gansos” era apresentada aos alunos a figura 15 que pretende simular uma possivel formação de voo.

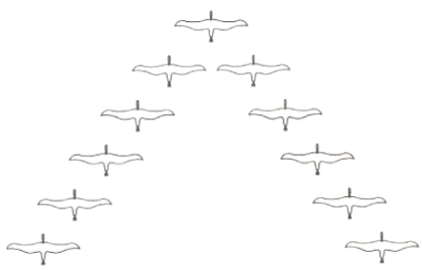


Figura 15 – Esquema de voo de aves em formação (Gansos)

Como 1.ª questão era pedido aos alunos que desenhassem um referencial que se adequasse à figura 14. Por ser uma questão com que os alunos não estão muito familiarizados, estes tiveram algumas dúvidas relativamente ao que era pretendido.

Investigadora: Então Pedro estás parado a olhar para o problema porquê?

Pedro: Não estou a perceber logo esta 1.º pergunta. Como assim desenhar um referencial?

Investigadora: Então, desenhas um referencial que penses que seja o mais adequado para a figura que tens aí representada.

O facto de um problema de matemática estar a pedir para desenhar o referencial deixou o Pedro confuso e sem perceber qual a estratégia a seguir. Nos problemas e exercícios que são normalmente apresentados aos alunos os referenciais estão sempre desenhados por essa razão os alunos nunca são confrontados as questões inerentes ao como desenhar o referencial relativamente a uma imagem.

No entanto após alguns momentos de reflexão e tentativas, o Pedro ao contrário dos seus colegas de grupo desenhou o referencial (fig. 16), que parece mais natural e mais simples para responder às restantes perguntas. Já o Manuel desenhou o que observa na fig. 17.

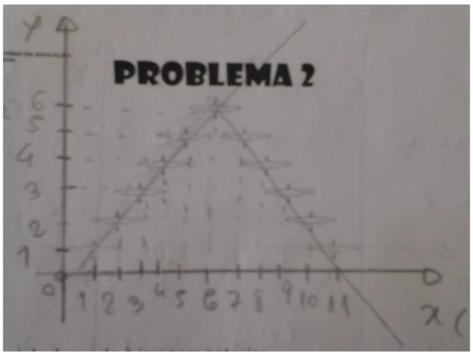


Figura 16 – Representação gráfica do *voo dos gansos* (Pedro)

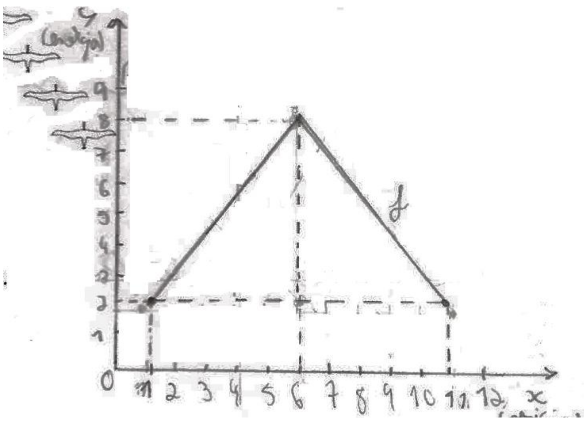


Figura 17 – Representação gráfica do *voo dos gansos* (Manuel)

Observando os referenciais desenhados pela Vanda e pelo Manuel e após as dificuldades sentidas pelo Pedro apercebemo-nos que perante a questão de desenhar um referencial para uma situação real por todos conhecida (o voo dos gansos) todos tiveram dificulades em perceber o que era para fazer e como o fazer. Tal como já foi referido o que é normal aparecer é exatamente o oposto. Uma das dificuldades sentidas pelo grupo foi o de perceberem o que tinha o voo dos gansos a ver com a matemática e com o desenhar um referencial.

Após ultrapassado os primeiros momentos de impasse, tal como já referimos apenas o Pedro desenhou o referencial mais natural. No entanto quando questionados acerca da sua opção de referencial quer a Vanda quer o Manuel não foram capazes de explicar a sua opção. Eventualmente porque não compreenderam bem a pergunta e portanto apenas desenharam um referencial com um gráfico com a forma em V invertido que o voo dos gansos simboliza. De referir ainda que nenhum dos três alunos questionou ou referiu o significado de x e de y. Fica ainda a dúvida se estes alunos compreenderam bem o conceito de referencial cartesiano.

Na 2.ª questão onde era necessário identificar qual a função que melhor descrevia a figura, os alunos mostraram-se muito hesitantes na sua resposta. Os três referiram que se não "estivesse" ao contrário o gráfico fazia lembrar uma função módulo… é importante referir que aquando da realização deste problema o único contacto que os alunos tinham tido com a função módulo tinha sido na tarefa de exploração "investigando a função módulo".

Após a leitura da 2.ª questão o Manuel ficou olhar para a investigadora

Investigadora: O que se passa?

Manuel: Não percebo o que estão a pedir...

Investigadora: Então lê lá o que pedem...

[O Manuel lê alto o que é pedido]

Manuel: Como assim a função que se adapta à figura?

Investigadora: Olha bem para a tua figura, se prestares atenção de certeza que ela te é familiar...

Manuel: Se estivesse ao contrário eu diria que era um módulo! Mas assim...posso sempre pensar que são duas semi retas que se intersetam naquele ponto...

Investigadora: Mas estavas a pensar bem! Não pode ser o módulo porquê?

Manuel: Está ao contrário do módulo!

Investigadora: Então pensa lá... temos uma parábola. (A investigadora desenha uma parábola com a concavidade voltada para cima). E só porque a "viro ao contrário" deixou de ser uma parábola?

[A investigadora desenha uma parábola com a concavidade voltada para baixo]

Manuel: Não...

Investigadora: Então?

Manuel: Pode ser o contrário do módulo?

Investigadora: Não gosto desse contrário...tu sabes o termo correto...

Manuel: Posso dizer que é o simétrico do módulo?

Investigadora: Sim!

Depois de uma breve conversa com a investigadora na qual foi dado um pequeno auxílio acerca das diferentes representações da função módulo os três alunos identificaram corretamente a função que representava o voo dos gansos. Uma vez mais apercebemo-nos que este grupo de alunos tem algumas dificuldades na conexão das diferentes representações de funções.

Na questão seguinte era pedido que os alunos deteminassem três coordenadas no referencial escolhido, o que não lhes trouxe qualquer dificuldade. Dos pontos escolhidos para determinar as coordenadas, houve um que foi comum aos três, o ponto de inflexão da função módulo. Para este grupo de alunos, o ponto de inflexão é um ponto fundamental na identificação da função módulo.

Na última questão, os alunos tinham que definir analiticamente a função definida na 2.ª questão. Ao chegar a esta etapa e depois de ter verificado que os alunos chegaram à conclusão de que se tratava de uma função módulo, a minha expetativa era que eles conseguissem utilizar os conhecimentos já adquiridos da função módulo para definirem a função presente neste problema, contudo não foi isso que se verificou. Apenas o Pedro definiu analiticamente a função aplicando os conhecimentos que tinha da função módulo. A Vanda e o Manuel foram utilizar outro tipo de estratégia. Para definirem a função simétrica do módulo, consideraram que a função traçada era composta por duas retas e como tal para as definir aplicaram os seus conhecimentos acerca de como definir uma equação da reta.

$$f(x)\begin{cases} y=\frac{6}{5}x+0{,}8 \text{ se } 1\leq x<6 \\ y=-\frac{6}{5}x+15{,}2 \text{ se } 6\leq x\leq 11\end{cases} \qquad m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad m=\frac{8-2}{6-1}=\frac{6}{5}$$

Figura 18 – Representação analítica do *voo dos gansos* (Manuel)

Apesar de terem conseguido identificar que o voo dos gansos podia ser definido por uma função módulo (neste caso o simétrico) a Vanda e o Manuel optaram por definir analiticamente a função através das equações de duas retas, conseguindo fazer corretamente a ligação entre dois conteúdos. Há a referir dois pontos importantes nesta etapa:

Quando desenvolveram a tarefa “Investigando a função módulo” e elaboraram o relatório, este grupo já tinha feito a ligação entre estes dois conteúdos. Apesar dos conhecimentos já adquiridos, quer com a realização da tarefa quer com os conteúdos lecionados em sala de aula; a Vanda e o Manuel mantiveram esta estratégia demonstrando não compreenderem o significado da função módulo, onde sendo $f(x)$ a função módulo $|x|$ a sua representação gráfica será igual a $f(x)$ se x tomar valores positivos e para valores negativos de x o seu gráfico será “refletido” sempre para $f(x)$ positivo. Já o Pedro apesar de na elaboração do relatório ter seguido a mesma abordagem na realização do problema demonstrou ter tido uma evolução na sua conceção da função módulo.

No relatório, quando foi necessário estudar o efeito do poder multiplicativo de um parâmetro a na função módulo, os alunos deste grupo desenharam os respetivos gráficos e retiraram as conclusões sem dificuldades aparentes, mas no relatório os valores sugeridos para a eram sempre positivos, não tendo sido estudado o caso em que a é negativo. Esta nova situação ($a<0$) foi retratada neste problema e os alunos não conseguiram utilizar a experiência obtida na realização do relatório para estudar esta variante da função módulo. Eventualmente os alunos necessitarão de uma maior reflexão acerca dos diversos aspetos da função módulo.

Quando questionados no final da sessão, acerca do que acharam deste problema, todos os alunos afirmaram que gostaram de realizar. Na opinião deles, este problema foi muito interessante e diferente mesmo não tendo sido na opinião dos alunos tão difícil como o 1.º.

Uma vez mais uma das principais dificuldades sentidas foi a passagem da representação gráfica que simbolizava o voo dos gansos para a representação algébrica. Essa dificuldade de passar de uma representação da função para outra representação também já havia sido sentida no primeiro problema, o que evidencia que apesar de terem conseguido completar o primeiro problema e após algumas aulas onde foram realizados exercícios de funções os alunos continuam numa conceção operacional do conceito de função.

Outra dificuldade sentida foi na construção do referencial, quer pela sua inovação no tipo de questão quer pelo próprio voo dos gansos que os alunos não compreendiam o que tinha de “matemática” para ser colocado num referencial. Uma vez mais apercebemo-nos que os alunos compartimentam os assuntos e os conteúdos aprendidos não conseguindo encontrar correlação entre eles.

4.1.5 - ÀS VOLTAS COM FUNÇÕES POLINOMIAIS

Na tarefa exploratória “às voltas com a função polinomial” foi proposto aos alunos estudarem as funções polinomiais de uma forma gradual e com recurso à calculadora gráfica.

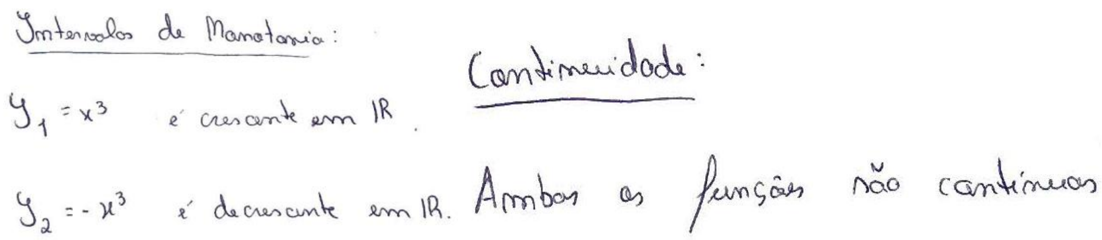
Na primeira questão os alunos tinham que estudar as funções polinomiais do 3.º grau $f(x) = ax^3 \; com \; a = -1$ ou a $= 1$, quanto ao seu domínio, contradomínio, existência de zeros, intervalos de monotonia, continuidade e injetividade (Anexo 6). Na análise desta primeira questão, os alunos recorrendo à calculadora gráfica descrevem corretamente o domínio, o contradomínio e a existência de um único zero de multiplicidade três.

Na 2.ª questão foi pedido aos alunos o mesmo tipo de estudo, mas para funções polinomiais do 3.º grau do tipo $f(x) = a(x-b)^3, a = 1 \; e \; b = -2 \; ou$ 2.

Na análise das funções polinomiais $f(x) = a(x-b)^3$ os alunos descrevem corretamente o domínio, contradomínio, e a existência de um único zero com multiplicidade três. A partir dos gráficos visualizados na calculadora gráfica conseguiram reter qual o aspeto dos gráficos das diferentes funções apresentadas, tendo no entanto utilizado o cálculo analítico na determinação do zero das funções e de mais alguns pontos pertencentes aos gráficos de modo a fazerem a sua representação com mais rigor no relatório escrito. Aparentemente, mesmo sendo possível determinar os zeros das funções diretamente na calculadora, os alunos optaram por fazer alguns cálculos "à mão", talvez devido à cultura de utilização de calculadora gráfica nas aulas de matemática ser recente e ainda pouco enraizada nos seus métodos de trabalho.

Esta opção pelo cálculo algébrico em detrimento da utilização da calculadora tem sido uma prática recorrente dos alunos deste grupo. Relembramos que no 1.º relatório eles não recorreram à utilização da calculadora e que nas outras tarefas propostas sempre que era possível o cálculo algébrico esse era o método escolhido, principalmente a Vanda.

No caso deste primeiro conjunto de funções apresentadas e talvez por ser algo muito evidente a partir dos gráficos observados, os alunos concluíram sem nenhum tipo de justificação (fig. 19) que as funções eram monótonas em ℝ, injetivas e contínuas. Neste caso, observou-se que a utilização da calculadora gráfica leva a que as respostas dadas sejam as corretas e os alunos não sentiram necessidade de as justificar.


Intervalos de Monotonia:

$y_1 = x^3$ é crescente em IR.

$y_2 = -x^3$ é decrescente em IR.

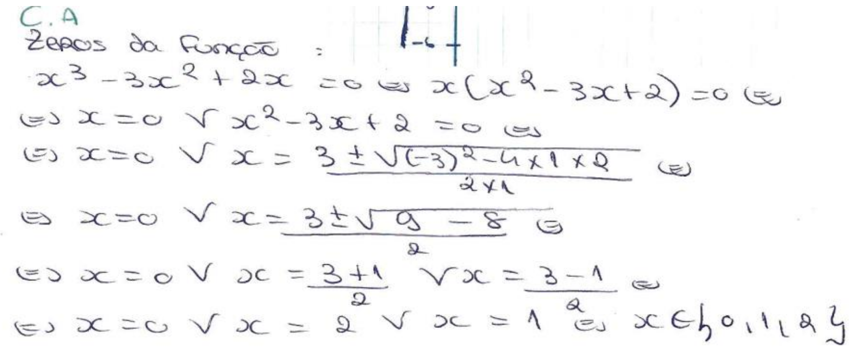
Continuidade:

Ambos os funções não contínuas

Figura 19 – Monotonia e continuidade da função polinomial (Grupo 1)

No estudo da função, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, os alunos conseguiram determinar os três zeros distintos da função (de forma analítica) e identificar corretamente os intervalos de monotonia.

Uma vez mais, parece ser importante a visualização do gráfico na calculadora para ficarem com uma ideia geral do seu esboço, tendo, no entanto no cálculo analítico dos zeros (fig. 20) e das coordenadas de alguns pontos continuado a ser uma estratégia utilizada pelos alunos no estudo destas funções.


C.A

Zeros da Função :

$x^3-3x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(x^2-3x+2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times2}}{2\times1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow$

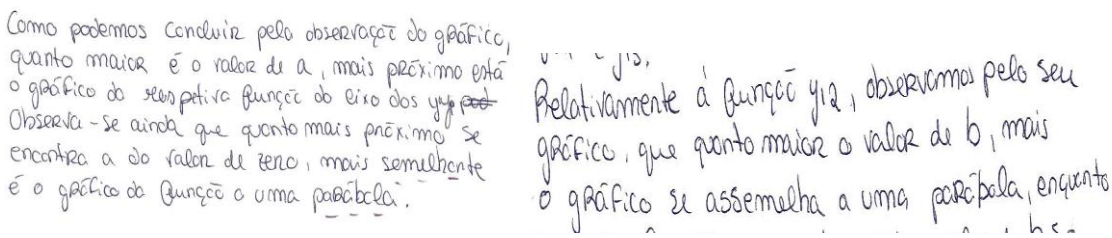
$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{3+1}{2} \vee x=\frac{3-1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=2 \vee x=1 \Leftrightarrow x\in\{0,1,2\}$

Figura 20 – Zeros da função polinomial (Grupo 1)

No último conjunto de questões em análise, onde se pretendia perceber qual a influência dos parâmetros a, b, c e d na função $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, os alunos estudaram cada parâmetro individualmente mantendo todos os outros fixos.

Desta análise, há uma conclusão que se repete em dois casos. Quer quando consideraram um valor muito próximo de zero para o coeficiente de x^3 quer quando consideraram um valor muito elevado para o coeficiente de x^2, mantendo todos os outros coeficientes fixos, obtiveram um gráfico cuja parte visível na janela selecionada parecia uma parábola. Mesmo quando alteraram a janela de visualização, continuaram a observar apenas a parte de um gráfico que se assemelhava a uma parábola, tendo então concluído (fig. 21) que para um coeficiente de x^3 dado por a=*0.001* ou para um coeficiente de x^2 dado por b=*50* o gráfico da função polinomial em estudo seria uma parábola.


Como podemos concluir pelo observação do gráfico, quanto maior é o valor de a, mais próximo está o gráfico da respetiva função do eixo dos yy ~~pod~~ Observa-se ainda que quanto mais próximo se encontra a do valor de zero, mais semelhante é o gráfico da função a uma parábola.

Relativamente à função y12, observamos pelo seu gráfico, que quanto maior o valor de b, mais o gráfico se assemelha a uma parábola, enquanto

Figura 21 – Análise do gráfico da função polinomial (Grupo 1)

Ao concluir que dependendo do valor de a e b, uma função polinomial de 3.º grau poderia ser uma função polinomial de 2.ºgrau os alunos demonstraram não ter compreendido que o gráfico que obtiveram na calculadora era apenas uma parte da representação gráfica da função que estavam a estudar e que essa “má” visualização se devia a uma escolha incorreta da janela de visualização. A referir que apesar de na questão anterior, terem identificado corretamente que o contra domínio da função polinomial seria $\mathbb{R}_0$ que não seria compatível com o que estudaram das funções quadráticas, não sentiram necessidade de inquirir a investigadora acerca da incompatibilidade da sua afirmação, o que nos leva a afirmar que estes alunos ainda se encontram numa fase de operacionalização do conceito não sendo ainda capazes da abstração necessária para conseguir fazer a ponte entre as diferentes representações das funções.

Outra ideia a reter da análise deste relatório é o recurso à calculadora gráfica deve ser feito de forma cuidada e em conjunto com os alertas necessários para combater a ideia que só existe o que é visível

4.1.6 - PROBLEMA DE ADMINISTRAÇÃO DE ANTIBIÓTICOS

Neste 3.º problema são dadas duas funções polinomiais do 3.ºgrau que representam concentrações de um antibiótico no sangue da Clara (*C(t)*) e do Joaquim (*J(t)*), em *mg/l* de sangue e *t* horas após a toma.

Neste problema os alunos deveriam recorrer à calculadora gráfica para responder às questões propostas.

Na 1.ª alínea pedia-se aos alunos que calculassem a concentração do antibiótico, no sangue da Clara, 15 minutos depois de ser administrado. Os alunos tinham que ter em atenção que a variável *t* está expressa em horas, assim sendo tinham que substituir *t* por ¼ de hora, ou seja, 0.25. Quer a Vanda quer o Manuel resolveram esta questão sem ter que recorrer ao auxílio da investigadora. No entanto, o Pedro precisou de auxílio da investigadora para conseguir encontrar estratégias para começar a resolver a questão.

Investigadora: Que se passa Pedro?

Pedro: Nem eu sei... isto parece muito fácil mas não estou a ver como fazer...

Investigadora: Vamos ver...diz-me lá o que é pedido...

Pedro: Então querem a concentração do antibiótico no sangue da Clara 15 minutos após de ela o ter tomado

Investigadora: Então e como achas que isso é feito?

[O Pedro ficou a olhar para a investigadora com um ar pensativo.]

Investigadora: Se a função C fosse uma função quadrática como fazias?

Pedro: Aí ia substituir o t *por 15*

Investigadora: E estaria bem se a unidade em que t *é expresso fosse minutos como é em horas o que fazias?*

Pedro: Ah! Então t *era ¼ de hora. Portanto substituía o* t *por 0,25*

Investigadora: Então e neste caso só porque tens uma função polinomial do 3.ºgrau já não é assim?

Pedro: Pois tem razão professora!

Após esta pequena reflexão conjunta o Pedro resolveu a alínea sem ter que recorrer novamente ao auxílio da investigadora.

Na 2.ª questão era necessário determinar ao fim de quanto tempo é que as concentrações de antibiótico no sangue da Clara e do Joaquim são iguais. Também aqui os alunos não tiveram qualquer dificuldade. O Pedro (fig. 22) e o Manuel resolveram esta alínea com recurso à calculadora tal como era esperado. Para poderem responder à questão colocada quer o Pedro quer o Manuel reproduziram o gráfico obtido na calculadora gráfica na sua folha, tendo feito esta representação:

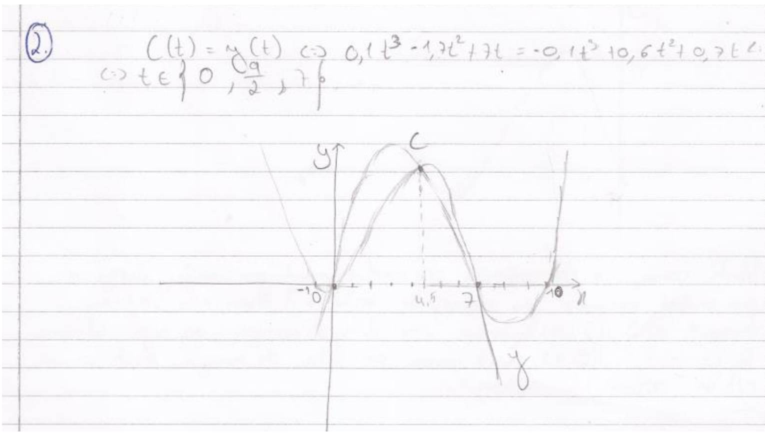


Figura 22 – Representação gráfica das concentrações de antibióticos (Pedro)

Esta atitude demonstra um maior conhecimento da utilização da calculadora e um à vontade maior por parte do Pedro e do Manuel, uma vez que na tarefa “Investigando a função quadrática” estes dois alunos tinham optado por calcular os zeros analiticamente.

A Vanda (fig. 23), optou por calcular os zeros analiticamente, mantendo a resistência demonstrada inicialmente relativamente ao uso da calculadora. Igualou as duas expressões C(t)=J(t) tendo obtido uma equação de 3º grau da qual conseguiu calcular a solução, por não haver termos independentes.

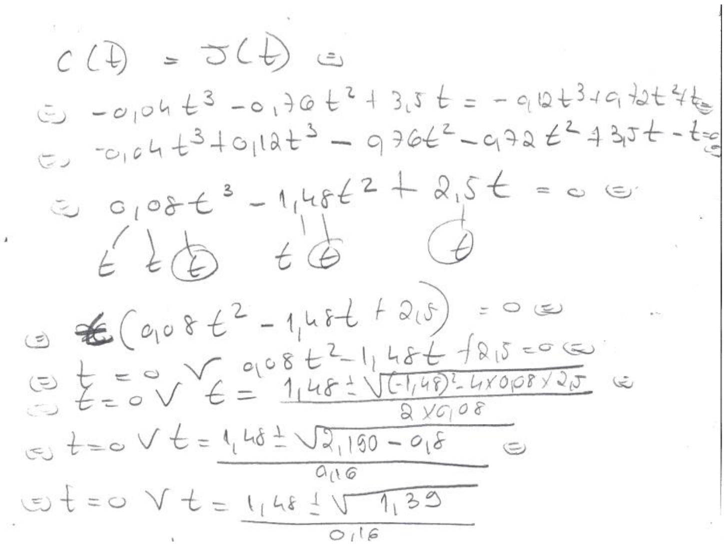


Figura 23 – Cálculo dos pontos de igual concentrações de antibiótico (Vanda)

É importante relembrar que a Vanda e o seu grupo tiveram essa mesma opção estratégica na tarefa “investigando a função quadrática” e na tarefa “às voltas com as funções polinomiais”. Nessa tarefa, da qual elaboraram um relatório, os alunos também foram calcular os zeros analiticamente quando o poderiam ter feito diretamente na calculadora.

Analisando esta opção da Vanda, interrogamo-nos do porquê desta estratégia. Seria de esperar que tal como os colegas a Vanda tivesse preferido utilizar a calculadora. Contudo, uma vez mais fica patente que nem todos os alunos estão familiarizados com a sua utilização, por essa razão se estiverem perante um problema ou exercício que seja possível resolver de duas vias, analiticamente ou com calculadora, alguns alunos optam pela via analítica.

Na questão seguinte os alunos tinham de determinar em qual dos dois sujeitos considerados, a concentração de antibiótico no sangue ultrapassa primeiro o valor de 7,5mg/l e em quanto é ultrapassado esse limiar.

Os três alunos compreenderam que, matematicamente o que era pedido podia-se representar por $C(t) > 7{,}5$ e $J(t) > 7{,}5$, ou seja, para bastava resolverem estas duas inequações para responderem à questão. No entanto, resolver as duas inequações demonstrou ser um problema, uma vez que as funções C e J são funções polinomiais do 3.º grau e os seus conhecimentos apenas permitem resolver estas inequações analiticamente se for conhecida pelo menos uma raiz de cada uma das funções C(t)-7,5 e J(T)-7,5. Como tal não acontece os alunos tiveram que recorrer à calculadora.

O Pedro e o Manuel não efetuaram qualquer comentário ao facto de terem que utilizar a calculadora para conseguirem resolver a alínea, porém a Vanda demonstrou o seu pouco à vontade com a calculadora.

Vanda: Temos mesmo que resolver isto na calculadora professora? Não nos pode dizer uma das raízes e assim já podíamos resolver analiticamente...

Investigadora: Não Vanda! Temos mesmo que utilizar a calculadora. Vai ser bom para ti! Assim começas a familiarizar-te mais!

Vanda: Pois... Então e como vou fazer isto? C(t)-7,5>0 ?

Investigadora: Então vamos lá pensar... Como resolver na máquina... Primeiro temos que introduzir as funções certo?

Vanda: Quais? a função C e J?

A Vanda introduziu as funções na calculadora tendo obtido duas curvas e depois parou.

Investigadora: Então agora o que queremos?

Vanda: Ver qual das duas é superior a 7,5.Mas como vou ver isso?

Investigadora: Pensa lá um bocadinho...vamos rever o que aprendemos...lembras-te da aula onde estudaste as inequações de 2º grau?

Vanda: Sim lembro

Investigadora: E lembras-te que antes de resolver analiticamente fizemos um gráfico para vermos como se resolvia graficamente a inequação?

Vanda: [Após um instante calada e pensativa] sim lembro...

Investigadora: Então?...o que se fez?

Vanda: Ah! Traçamos uma reta y *igual a um valor que já não me lembro...*

Investigadora: Então e aqui o teu valor é qual?

Vanda: Já me lembro...então temos que traçar outra função y=7,5 *e depois ver qual das duas pessoas ultrapassa esse valor que é o mesmo que dizer que ultrapassa a reta* y=7,5.

Após esta conversa com a investigadora a Vanda conseguiu completar o problema, não apresentando dificuldade no manuseamento da calculadora, o que nos faz supor que ela evita utilizar a calculadora sempre que possível, mas ainda assim apresenta algum domínio da ferramenta.

Após ter concluído que era a função *C (a Clara)* que ultrapassava o limiar de *7,5mg/l*, era necessário determinar quanto tempo antes atingia a Clara esse limiar relativamente ao Joaquim, caso este o atingisse. Para responder a esta questão bastou aos alunos uma análise correta do gráfico, tendo os três respondido corretamente, demonstrando não terem dificuldade na interpretação gráfica dos problemas.

No entanto, o Pedro optou por uma estratégia diferente da escolhida pela Vanda e pelo Manuel, que optaram por desenhar no mesmo referencial a função que representava o tempo de reação da Clara e a função que representava o tempo de reação do Joaquim, tendo feito um gráfico para cada função (fig. 24).

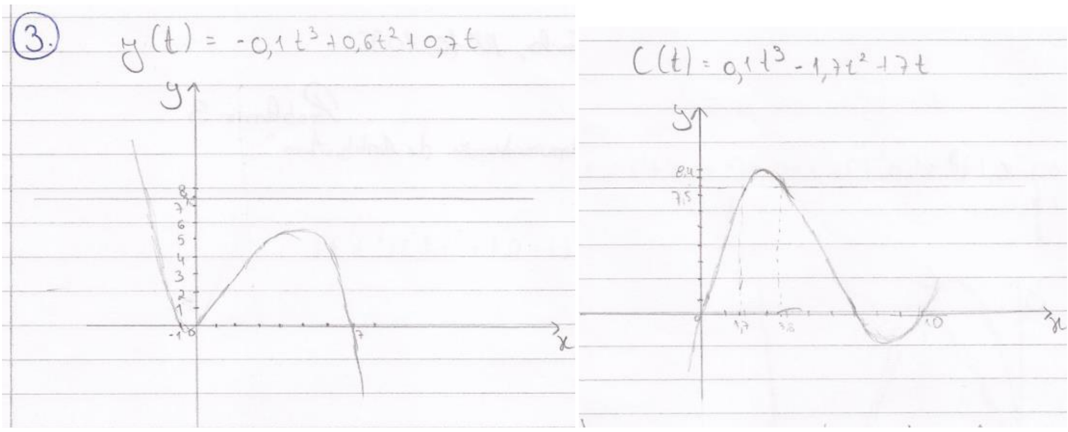


Figura 24 – Representação gráfica das concentrações de antibióticos usando dois referenciais (Pedro)

Por fim na última questão, é pedido que os alunos determinem quem irá tomar uma nova dose de medicamento e quanto tempo antes do outro, sabendo que isso acontece quando a concentração de medicamento no sangue volta a ser inferior a *2mg/l*.

O raciocínio necessário para responder a esta questão era muito semelhante ao utilizado anteriormente. Uma vez mais os alunos recorreram às capacidades da calculadora gráfica para resolver a questão.

Os três alunos conseguiram sem auxilio da investigadora introduzir corretamente as duas funções assim como a restrição colocada no problema tendo responder corretamente à questão colocada. Uma vez mais ficou evidente que os alunos não sentem dificuldades em interpretar os gráficos. Pudemos ainda constatar uma evolução nas suas capacidades de utilização da calculadora principalmente da parte da Vanda.

4.1.7 - VISÃO DOS ALUNOS RELATIVAMENTE À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E À ELABORAÇÃO DOS RELATÓRIOS

Quando questionados na entrevista acerca do que sentiram nas atividades propostas que visavam a elaboração dos relatórios e dos problemas, os três foram unânimes em responder que um dos maiores entraves foi o não conhecimento do funcionamento da calculadora gráfica. Outra dificuldade apontada pelos alunos foi a de encontrar estratégias adequadas quando as questões propostas envolviam parâmetros, como é o caso da questão 8 do 1º relatório, da questão 4 do 2º relatório e da questão 4 do 3º relatório. Foi no entanto possível constatar que os alunos realçaram que o grau de dificuldade que sentiram para encontrar estratégias diminuiu ao longo das atividades, como refere o Pedro:

> *Pedro: No primeiro relatório precisamos da ajuda da professora para compreender o que era pedido porque nem isso conseguíamos perceber. No relatório do módulo não encontrámos nenhuma dificuldade de maior. Mesmo na questão 4 conseguimos dar a volta e juntos encontrámos estratégias para a resolver. No relatório da polinomial a grande dificuldade foi a falta de tempo... não conseguimos escrever as coisas como queríamos pois a tarefa era muito grande e foi tudo um bocado à pressa*

Essa evolução foi também sentida acerca da utilização da máquina.

> *Manuel: No terceiro relatório já não havia segredos em relação à utilização da calculadora.*

Outra das dificuldades apresentadas foi o da elaboração do relatório em si. Os alunos afirmaram que tiveram dificuldades em transcrever os seus conhecimentos para o relatório e de seguir o guião dado para elaboração do mesmo.

> *Vanda: No 1.º relatório estava com muito receio de que não tivéssemos seguido o guião como era pretendido... não fazia a mínima ideia do que escrever na introdução nem nos comentários...foi muito difícil*
>
> *Investigadora: Então e nos restantes relatórios?*
>
> *Vanda: Já foi um bocadinho mais fácil... no relatório do módulo o problema foi só nos comentários... nenhum de nós gosta de fazer os comentários! Empurrávamos sempre uns para os outros. No da polinomial era muito grande...acho que se tivéssemos tido mais tempo tínhamos feito um trabalho melhor!*

Quando questionados acerca do que pensaram da realização dos relatórios e se consideraram essa atividade benéfica, todos os elementos do grupo afirmaram que sim. Todos afirmam ter gostado da realização das tarefas exploratórias e até da elaboração dos relatórios.

> *Investigadora: O que acharam destas tarefas das quais vos foi proposto fazerem relatórios?*
>
> *Vanda: Eu gostei muito! Nunca tinha feito nenhuma atividade deste tipo e gostei muito. Mesmo os relatórios apesar de início ter sido difícil gostei de os fazer.*
>
> *Investigadora: E achas que foi benéfico? Conseguiste aprender o que foi proposto?*
>
> *Vanda: Acho que aprendemos muito. Acho que por causa de sermos nós, em particular eu, a pensar e a "descobrir" o que se passava com as funções ajudou-me a compreender melhor e a conseguir ultrapassar as minhas dificuldades.*

Quando questionados se gostariam que este tipo de tarefas fossem incluídas como prática letiva, apenas o Pedro considera que este tipo de atividade deve se realizada esporadicamente "Talvez um ou dois por ano não mais".

Ao perguntarmos o porquê, o Pedro afirma que “rouba” tempo útil à sala de aula.

Investigadora: Porquê?

Pedro: Porque rouba tempo à aula e assim vamos resolver menos exercícios e são esses que importam para o exame!

Quer a Vanda quer o Manuel consideram que seria proveitoso para todos a realização de tarefas de índole exploratória e elaboração dos relatórios respetivos.

Investigadora: Gostarias de ver este tipo de atividade incluída nas atividades letivas?

Vanda: Sim gostava. Acho que para os alunos que acham que as aulas de Matemática são muito chatas, este tipo de atividade ajuda-os a gostarem do que estamos a estudar e das aulas. O que eu vi nas três aulas em que fizemos os relatórios foi os meus colegas que nunca fazem nada trabalharem e a tentarem dar o seu melhor.

Após a realização de três tarefas de investigação e respetiva elaboração de relatórios estamos em condições de dizer que houve uma evolução muito positiva neste grupo. Da primeira para a última tarefa notou-se uma evolução no espirito critico dos três alunos quer no que diz respeito a encontrar estratégias para resolver as questões propostas quer na forma de resolver algum impasse perante o qual a tarefa os colocasse. Podemos observar igualmente uma evolução na forma como utilizaram a calculadora gráfica. Enquanto na primeira tarefa estes alunos optaram por recorrer apenas a procedimentos algébricos (algumas vezes de forma incorreta) nas últimas tarefas, relativas à função polinomial, não mostraram resistência à utilização da calculadora, tendo sido capazes na maior parte das situações de a manusear sem ajuda.

De referir ainda que ao realizarem um relatório das tarefas propostas, foi possível perceber quais as dificuldades que os alunos tiveram e sendo mais fácil delinear uma estratégia a fim de os ajudar.

Quando questionados acerca do que pensavam das sessões de trabalho individuais nas quais foi proposto a resolução de três problemas, os alunos afirmaram ter gostado muito de participar nessas sessões.

Investigadora: Depois de terminadas as nossas sessões onde em cada uma resolvemos um problema gostava que me dissessem o que sentiram?!

Vanda: Eu gostei muito! Foi uma experiência nova muito desafiante e que estimulou a nosso raciocínio abstrato, como diz a Professora Teresa. Foi giro! Mas também difícil...

Investigadora: Porquê difícil?

Vanda: Porque não estamos habituados a este tipo de problemas, principalmente o problema 1 e algumas questões do problema 2. O problema 3 foi o mais fácil e ajudou-me muito com a calculadora. Antes não gostava nada de ter que utilizá-

la em alguns exercícios mas depois dos relatórios e principalmente do problema 3 já não me importo.

Para a Vanda o problema 1 foi o mais difícil e o problema 3 o mais simples. Os seus colegas de grupo têm a mesma ideia acerca da dificuldade dos problemas propostos. Quando a investigadora perguntou o porquê dessa dificuldade, a resposta que obteve foi:

Pedro: No problema 1 somos obrigados a saber relacionar diversas matérias e nós não estamos habituados. Até o enunciado do problema era diferente do que estava habituado. Além disso como é um problema grande e complexo quando chegamos ao fim já não nos lembramos da questão inicial, e assim arriscamo-nos a ter a resposta errada ou incompleta. Mas foi o que mais gostei de fazer.

Quando questionados se consideraram benéfica a sua participação na resolução de problemas, os três alunos foram unânimes afirmando que acharam estas atividades muito benéficas e proveitosas para a sua aprendizagem.

Investigadora: Achas que a resolução destes três problemas foi benéfica para a tua aprendizagem?

Vanda: Eu acho que foi muito importante! Pelo menos a mim ajudou-me a ter a noção de que a matemática não é como um receituário. Foram problemas muito diferentes dos exercícios que aparecem na maior parte dos livros. Estes problemas obrigaram-nos a pensar mesmo! E isso é importante!

No entanto, quando questionados acerca se gostariam de ver este tipo de atividade implementada em sala de aula, apenas o Manuel respondeu afirmativamente.

Manuel: Acho que seria benéfico para todos os alunos terem a oportunidade de poder realizar este tipo de problemas em sala de aula. Na minha opinião, e como eu os acho desafiantes, penso que iria estimular o gosto pela matemática mesmo naqueles alunos que não gostam de matemática.

Quer a Vanda quer o Pedro consideram que estes problemas deveriam estar mais presentes na sua aprendizagem mas fora do ambiente de sala de aula.

Vanda: Há sempre aqueles alunos que não percebem e nem tentam perceber e isso iria levar a uma desestabilização do resto da turma.

O Pedro ainda refere que este tipo de problemas é bom para levar como trabalho de casa mas em sala de aula iria tirar tempo útil de aula.

Perante estas afirmações parece-me importante reiterar a ideia de que a inclusão deste tipo de tarefas em sala de aula possibilitaria aos alunos um maior contacto com este tipo de problemas, permitindo desenvolver melhores competências quer na sua compreensão, quer na sua resolução. Para os alunos este tipo de raciocínio é benéfico pois ajuda-os a desenvolverem estratégias de resolução muitas vezes recorrendo a diferentes conteúdos e a estabelecer elos de ligação entre duas ou mais matérias.

4.2 - GRUPO 2

O segundo grupo selecionado para a realização deste trabalho foi o grupo da Maria, da Carolina e da Francisca.

Este grupo caracteriza-se pelo empenho das alunas em aprender mesmo quando estão com dificuldades. Regra geral são alunas trabalhadoras apesar de em alguns casos os resultados não refletirem o empenho que elas demonstram em aula.

MARIA

A Maria tinha quinze anos de idade no início do ano letivo 2014/2015 e estava a frequentar o décimo ano pela primeira vez. No ano letivo anterior foi considerada como uma aluna com bom desempenho a Matemática, tendo obtido a classificação final de 4 valores (escala de 0 a 5). Trata-se de uma aluna com facilidade de expressão, tanto oral como escrita, que gosta da disciplina de Matemática.

Apesar do bom desempenho no ano letivo anterior a Matemática, este ano tem mostrado mais dificuldades que se têm refletido nas classificações obtidas. É uma aluna que gosta de participar nas aulas, porém no decorrer do ano letivo a Maria passou por períodos em que parecia desmotivada e não participava a não ser que fosse solicitada.

Não obstante sempre se mostrou motivada nas nossas sessões de trabalho individuais, tendo-se revelado uma aluna que gosta de desafios.

FRANCISCA

A Francisca tinha quinze anos de idade no início do ano letivo 2014/2015 e estava a frequentar o décimo ano pela primeira vez. No ano letivo anterior foi considerada como uma aluna com desempenho fraco a Matemática, tendo obtido, no fim do ano letivo anterior, a classificação de 2 (escala de 0 a 5). Apesar disso a Francisca afirma que gosta muito de matemática.

Trata-se de uma aluna que mostra uma certa dificuldade na expressão tanto oral como escrita, mas que é muito trabalhadora. Essa sua persistência e trabalho árduo refletem-se nas classificações. Este ano letivo a Francisca tem obtido notas entre o 14 e o 16, mesmo sendo notório que é uma aluna com dificuldades no que diz respeito à apreensão dos conceitos de matemática. Apesar dessas dificuldades a Francisca tem boas notas quando comparadas com o nível médio da turma, o que reflete o seu trabalho árduo.

A Francisca não gosta de novos desafios gostando de aulas expositivas e de ser avaliada por testes e participação na sala de aula. No entanto, quer nos trabalhos de investigação foi uma aluna aplicada e interessada tendo-se mostrado motivada nas sessões de trabalho individuais.

CAROLINA

A Carolina tinha quinze anos no início do ano letivo 2014/2015 e era a primeira vez que frequentava o décimo ano. No ano letivo anterior foi considerada como uma aluna com um desempenho razoável a Matemática tendo obtido a classificação final de 3 valores.

Apesar do seu desempenho no ano letivo passado, este ano a Carolina tem sentido muitas dificuldades, tendo como reflexo o baixo desempenho nos testes sumativos. A Carolina é uma aluna muito interessada e trabalhadora, mas também muito ansiosa. A sua ansiedade aliada às classificações menos boas no primeiro teste transformou a Carolina numa aluna com uma ansiedade extrema pautada por uma falta de confiança que se reflete quando solicitada em sala de aula para responder a uma questão ou resolver um exercício no quadro perante a turma.

A Carolina gosta de novos desafios e sempre se mostrou muito interessada e empenhada nas tarefas propostas nas nossas sessões de trabalho individuais.

4.2.1 - INVESTIGANDO A FUNÇÃO QUADRÁTICA

Nesta tarefa "Investigando a função quadrática", apesar das explicações inicialmente dadas pela professora, o grupo 2 (Patrícia, Maria e Carolina) ainda apresentou algumas dificuldades na manipulação da calculadora gráfica. A sua maior dificuldade foi na definição da janela de visualização. As alunas não compreenderam, como determinar os valores que tinham que dar a x e a y na janela de visualização para que conseguissem visualizar os gráficos. Só após um auxílio suplementar da professora as alunas conseguiram iniciar a tarefa.

Para a concretização da primeira tarefa, neste grupo apenas existia uma calculadora pois duas das alunas ainda não a tinham adquirido. Na calculadora utilizada, os gráficos de funções estudados foram visualizados sem os eixos totalmente definidos uma vez que a janela de visualização escolhida pelas alunas não era a mais correta tendo uma amplitude maior do que a amplitude correta.

Os alunos estudaram a função quadrática $f(x) = ax^2 + k$, primeiro com $a=2$ *e* $k=0$, $a=-2$ e de seguida com $a=-2$ e $k=1$. Tendo transcrito para o relatório o esboço dos gráficos observados na calculadora, identificaram sem dificuldades as coordenadas do vértice, a equação do eixo de simetria, o zero não tendo, contudo, referido que se estava em presença de um zero duplo, e o sentido da concavidade. Contudo na função $f(x) = 2x^2 + 1$ (fig.25) as alunas não conseguiram determinar de forma correta nem o contradomínio, apesar de terem obtido as coordenadas do vértice corretas nem o zero da função tendo dito que o zero da função existia e era 0 quando na realidade a função $f(x) = 2x^2 + 1$ não tem zeros reais. Ao não conseguirem identificar corretamente o contradomínio do gráfico leva-nos a supor que a noção de contradomínio estudada em anos anteriores não ficou bem apreendida.

No estudo da função $f(x) = 2(x-3)^2 + 1$ (fig. 25), também indicaram que a ordenada do vértice seria *y=1*, ou seja, percebem que *k=1* significa uma translação vertical do gráfico de uma unidade mas não conseguem associar essa translação à modificação do contradomínio da função, possivelmente porque as alunas não perceberam o conceito de contradomínio não sendo capazes por essa razão de os calcular corretamente, quer seja algebricamente quer seja graficamente. Ao não compreenderem o conceito de contradomínio obviamente que não se aperceberam que as translações nos gráficos das funções quadráticas altera o seu contradomínio.

- para $y = 2x^2 + 1$

- V(0,1)
- Eixo de simetria: reta de equação $x = 0$
- Zeros da função: f(x)= 0, $x \in \{\emptyset\}$
- Sentido da concavidade: voltada para cima
- Contradomínio: $\mathbb{R}_0^+$

- para $y = 2(x-3)^2 + 1$

- V(6,1)
- Eixo de simetria: reta de equação $x = 6$
- Zeros da função: f(x)= 0, $x \in \{6\}$
- Sentido da concavidade: voltada para cima
- Contradomínio: $\mathbb{R}0 +$

Figura 25 – Vértice, simetria, zeros, concavidade e contradomínio da função quadrática (Grupo 2)

Uma vez mais constatamos que as alunas deste grupo não interiorizaram o conceito de contradomínio.

De referir ainda, que no estudo das funções $f(x) = 2(x-3)^2$ e $f(x) = 2(x-3)^2 + 1$ (fig.26), as alunas indicaram que o vértice teria de abcissa o valor *x=6* e que a razão seria por *a=2* e *h=3*, tal como podemos constatar na seguinte conversa com a investigadora:

Carolina: Professora, aqui o vértice é no ponto (6,0) não é?

Investigadora: Porque vos parece que o vértice é nesse ponto?

Francisca: Então temos a = 2 e h=3 logo o vértice é nesse ponto…

Esta situação deixa transparecer que compreenderam que o parâmetro h influencia a localização do vértice da parábola uma vez que por influencia do vetor (h,0) existe uma deslocação da parábola para a direita. Contudo o facto de a equação da parábola ter o parâmetro $a = 2\ (\neq 1)$ levou as alunas a multiplicar o valor de a por h, o que nos leva a supor que as alunas ainda não tinham conseguido apreender o verdadeiro significado de cada um dos parâmetros. Refira-se que as alunas apreenderam que o eixo de simetria passa pelo vértice da parábola pois mantiveram a coerência, ao indicar (erradamente) que o eixo de simetria seria a reta de equação *x=6*.

- para $y = 2(x-3)^2$

- V(6,0)
- Eixo de simetria: reta de equação $x = 6$
- Zeros da função: f(x)= 0, $x \in \{6\}$
- Sentido da concavidade: voltada para cima
- Contradomínio: $|\mathbf{R}0+$

- para $y = 2(x-3)^2 + 1$

- V(6,1)
- Eixo de simetria: reta de equação $x = 6$
- Zeros da função: f(x)= 0, $x \in \{6\}$
- Sentido da concavidade: voltada para cima
- Contradomínio: $|\mathbf{R}0+$

Figura 26 – Vértice, simetria, zeros, concavidade e contradomínio da função quadrática, continuação (Grupo 2)

Parte das dificuldades já enunciadas são consequência de uma deficiente interpretação do conceito de translação do gráfico segundo um vetor, onde conseguem apenas interpretar corretamente a translação vertical, (fig. 27). Repare-se que na primeira afirmação as alunas referiram que havia uma translação do gráfico associada a um vetor de coordenadas (3,0) mas no entanto a transformação da função apresentada está na mudança do parâmetro $a = 1$ para $a = 2$ que influencia na abertura da parábola e não na deslocação da mesma para a esquerda ou direita.

É importante referir que é possível transformar:

- $y = (x-3)^2$ em $y = 2(x-3)^2$ através de uma translação associada a um vetor de coordenadas (3,0)

- $y = (x-3)^2$ em $y = 2(x-3)^2 + 1$ através de uma translação associada a um vetor de coordenadas (3,1)

Figura 27 – Translações de gráficos de funções quadráticas (Grupo 2)

Podemos também constatar que este grupo apresentou imensas dificuldades no conceito de paridade da função, sendo notório que não compreenderam o conceito na sua totalidade. Podemos ver que em todas as funções em que as alunas tentaram estudar a paridade, não foram bem-sucedidas, tendo confundindo a simetria relativamente a um eixo que não o das ordenadas com a paridade de uma função. O problema colocou-se na interpretação do que são objetos simétricos, pois apesar de na definição de função par escreverem *x* e *–x*, não compreenderam o seu significado. Repare-se que na aplicação do conceito de paridade às funções $f(x) = a(x-3)^2 +$

k, consideraram como simétricos, os objetos que se encontravam à mesma distância do eixo de simetria, que não sendo a reta $x=0$, não se traduziam em objetos simétricos (fig. 28).

Relativamente à paridade da função:

- $y = (x-3)^2$

A função é par, dado que $\exists\, 5 \neq 1 : f(5) = f(1)$

- $y = 2(x-3)^2$

A função é par, dado que $\exists\, 4 \neq 8 : f(4) = f(8)$

- $y = 2(x-3)^2 + 1$

A função é par, dado que $\exists\, 3 \neq 9 : f(3) = f(9)$

Figura 28 – Paridade da função quadrática (Grupo 2)

Relativamente ao recurso a estratégias e processo de exploração, este grupo teve algumas dificuldades em encontrar processos de resolução das tarefas propostas tendo que solicitar o auxílio da investigadora.

Relativamente à mobilização de informação e conhecimentos, este grupo conseguiu recorrer a conhecimentos essenciais à exploração da tarefa mas a maior parte das vezes não os conseguiu aplicar adequadamente.

O relatório deste grupo descreve e explica os passos do trabalho, embora na maior parte das vezes não explicite a forma como os seus elementos pensaram e apesar de descrever as conclusões não as explicita na totalidade.

Da elaboração deste relatório e em relação ao grupo da Francisca, Maria e Carolina pode-se concluir que uma das grandes dificuldades apresentada foi o da elaboração do relatório em si. As alunas tiveram dificuldades em aplicar e explicitar os seus conhecimentos. Em geral, as alunas não conseguem expressar quer matematicamente quer a nível do Português todas as opções metodológicas e conclusões a que chegaram. Explicitaram algumas das suas dificuldades, apesar de apenas se terem focado no facto de não saberem trabalhar com a calculadora gráfica e não nas outras dificuldades que encontraram. Uma dessas dificuldades é inerente ao facto de, na resolução de algumas das tarefas, se requerer que os alunos se abstraiam do facto de terem funções definidas de uma forma geral com um conjunto de parâmetros em vez de valores numéricos. Este processo de abstração apenas é possível após uma correta interiorização e operacionalização dos conceitos, tal como é referido por Sfard (1987). No entanto, ao longo da realização desta tarefa pudemo-nos aperceber de que este grupo está ainda num processo de interiorização não tendo ainda sequer passado à fase de condensação daí é natural a sua dificuldade em se abstrair de forma a conseguir encontrar estratégias para a resolução da tarefa proposta.

Fizeram uma pequena conclusão, mas nenhum membro do grupo se autoavaliou nem resumiu o que aprenderam nesta atividade. Penso que grande parte destas dificuldades se devem ao facto de a realização de relatórios em matemática não ser uma tarefa habitual no seu percurso escolar.

Quando questionadas na entrevista individual acerca da realização do relatório, as três alunas do grupo foram unânimes em referir que foi na realização do 1.º relatório que tiveram mais dificuldades.

Maria: O 1.º relatório foi o pior. Quando vimos o guião que a professora nos deu e depois a tarefa... eu pensei "isto não vai correr bem!" ainda por cima era a primeira vez que íamos "mexer" na calculadora. Eu e a Carolina nem tínhamos...só a Francisca! Mas depois nos outros dois já não fiquei tão alarmada e acho que correu melhor. Pelo menos nós não tivemos tantas dificuldades!

Professora: Mas qual foi a vossa maior dificuldade? Foi na tarefa ou foi na elaboração em si do relatório?

Maria: Nem sei professora... foi nas duas! Nunca tínhamos feito tarefas como aquela...só com letras! ... e ainda por cima ter que fazer um relatório onde tínhamos que fazer objetivos, introdução, comentários... essa parte foi sempre um bocado complicada! Não estamos habituados a ter que escrever assim para matemática!! Mesmo nos outros ... os comentários era a pior parte!!

Professora: Mas gostaste da atividade, tarefa e relatório, que vos foi proposta?

Maria: Gostei! Passado o susto inicial!

Importa ainda referir que tal como o grupo anterior este grupo optou por realizar os cálculos algebricamente tendo em conta que este foi o seu primeiro contacto com a calculadora e as suas potencialidades de representação gráfica.

4.2.2 - PROBLEMA ÁREA MÍNIMA

Este foi um dos três primeiros problemas apresentados aos seis alunos selecionados para este estudo. A sua resolução foi efetuada individualmente num horário extra-aula.

Neste problema, os alunos tinham que determinar o ponto onde um fio de 36cm deveria ser cortado, de forma que quando com cada uma das partes formassem quadrados, a soma das áreas desses quadrados fosse mínima.

A primeira dificuldade sentida pela Francisca foi a interpretação do problema.

Francisca: Não estou a perceber professora...

Investigadora: Vamos ler em conjunto: temos um fio com 36 cm de comprimento. Pretendemos cortar esse fio em duas partes de forma a que com cada parte do fio consigamos "construir" um quadrado. Sabemos ainda que a soma das áreas *dos dois quadrados deverá ser mínima.... tenta agora reescrever o que acabámos de analisar em linguagem matemática...*

Quando questionada na entrevista sobre o porquê desta dificuldade, a Francisca refere que não está habituada a enunciados que são pouco explícitos.

Investigadora: relativamente aos problemas que propus, o que achaste?

Francisca: achei que eram difíceis, principalmente o 1.º problema. Tive muitas dificuldades para o fazer...logo no início nem fazia ideia o que era para pedido! Mas gostei...

Esta dificuldade foi sentida igualmente pelas outras duas alunas do grupo, a Carolina e a Maria e também elas referiram na entrevista que ao lerem o problema não conseguiram identificar as hipóteses e qual a estratégia a seguir. Relembramos que estas mesmas dificuldades foram sentidas pelo grupo do Pedro, Vanda e Manuel. Tal como referimos a natureza desta tarefa obriga os alunos a estratégias tais como traduzir para linguagem matemática as hipóteses colocadas que se apresentam sob uma forma pouco usual à qual os alunos não se encontram familiarizados, relacionar conhecimentos previamente apreendidos. Nesta tarefa os alunos vêm-se confrontados com a necessidade de se uma passagem do concreto para o abstrato. No entanto essa abstração apenas é possível, segundo Sfard (1987), após uma correta interiorização e operacionalização dos conceitos necessários á realização da tarefa. Tendo em atenção as dificuldades apresentadas pelas três alunas na tarefa "investigando a função quadrática" parece-nos evidente que as alunas ainda se encontram numa fase de interiorização de alguns dos conceitos envolvidos.

Perante estas afirmações e visto esta mesma dificuldade já ter sido expressa pelos alunos do grupo 1, parece-me importante reiterar a ideia de que a inclusão deste tipo de tarefas em sala de aula possibilitaria aos alunos um maior contacto com este tipo de problemas, permitindo desenvolver melhores competências quer na sua compreensão, quer na sua resolução. Para os alunos este tipo de raciocínio é benéfico pois ajuda-os a desenvolverem estratégias de resolução muitas vezes recorrendo a diferentes conteúdos e a estabelecer elos de ligação entre duas ou mais matérias. Na entrevista feita às alunas pudemos constatar que elas partilham desta mesma ideia.

Investigadora: Qual foi mais difícil?

Maria: Para mim foi o primeiro. Gostei muito de fazer o último pois aprendi a utilizar a máquina em muitas questões que não sabia como o fazer.

Investigadora: achas que seria mais fácil se fizesses mais este tipo de problemas?

Maria: Acho que sim

Investigadora: Porquê?

Maria: Porque temos que pensar de uma forma diferente daquela que pensamos nas aulas. Se não estivermos habituados é muito difícil mas ao fazermos mais habituamo-nos ao tipo de raciocínio e fica mais fácil

Após a leitura do problema, apenas a Francisca considerou inicialmente a hipótese mais fácil, que os quadrados teriam que ser iguais.

Francisca: Então temos um fio com 36cm e queremos "cortá-lo" de forma a obtermos dois quadrados. Se fizermos 36/2 temos que cada quadrado terá 18cm de perímetro (fig. 29).

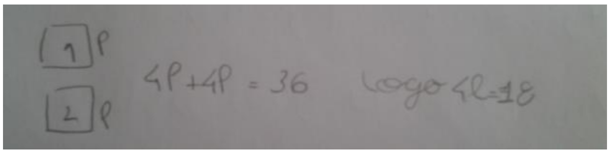


Figura 29 – Representação inicial dos quadrados (Francisca)

Investigadora: Isso é verdade se um dos nossos pressupostos fosse que os quadrados eram iguais. Mas não é isso que temos pois não? Temos então que supor que deverão ou poderão ser quadrados com perímetros diferentes.

Francisca: Hum...pois! não tinha pensado nisso. Então temos, [ver fig. 30]

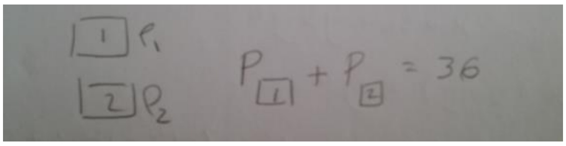


Figura 30 – Segunda representação dos quadrados (Francisca)

E ainda sabemos que a soma das áreas deverá ser mínima, não é Professora?

Investigadora: Certo! Mas tens que equacionar também esse pressuposto, não é?

Francisca: Esqueci-me! Então a área do quadrado 1 mais a área do quadrado 2 terá que ser mínima (fig. 31).

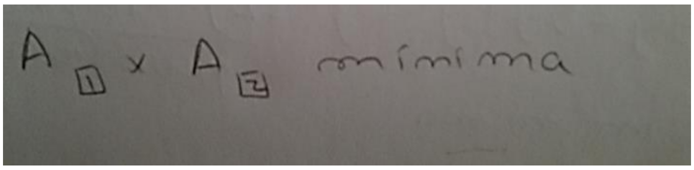


Figura 31 – Formulação do problema relativamente à área (Francisca)

Apesar de ter oralmente expresso corretamente o que era pretendido a Francisca não o conseguiu traduzir corretamente para linguagem matemática tendo escrito que o valor obtido do produto da área do quadrado 1 pelo quadrado 2 deveria ser mínimo. Uma vez mais vemos aqui evidências da dificuldade que os alunos sentem na conexão das diferentes representações e na passagem do seu raciocínio para linguagem simbólica.

Após escreverem matematicamente as hipóteses as alunas tiveram uma dificuldade comum, sobre a forma como deveriam continuar. Para conseguir chegar à expressão do perímetro a Maria necessitou de encaminhamento por parte da investigadora.

Maria: E agora? Não tenho mais informação que me permita continuar professora...

Investigadora: Tens a certeza? Olha lá para o que acabaste de escrever... tens que 36 é igual a quê?

Maria: É igual ao perímetro

Maria: Sim... é igual ao perímetro do quadrado 1 mais ao perímetro do quadrado 2. Mas é só isso que tenho...

Investigadora: Então e o perímetro do quadrado 1 pode ser escrito como?

Maria: Perímetro do quadrado 1 é igual à soma dos lados.

A Carolina sentiu a mesma dificuldade, mas com o encaminhamento dado pela investigadora conseguiu perceber o que era pretendido. Quando foi solicitado que escrevessem o que significava a área do quadrado 1 e a área do quadrado 2 a Francisca considerou mais uma vez que os quadrados eram iguais. Mesmo quando interpelada pela investigadora ela não percebeu o que estava a considerar um caso particular.

Investigadora: Qual a área do quadrado1?

Francisca: x vezes x

Investigadora: O que representa o x?

Francisca: O lado do quadrado 1.

*Investigadora: C*erto! E qual a área do quadrado 2?

Francisca: x vezes x (fig. 32). Ah!... já percebi onde está o meu erro! Não pode ser x o lado do quadrado 2 pois não?

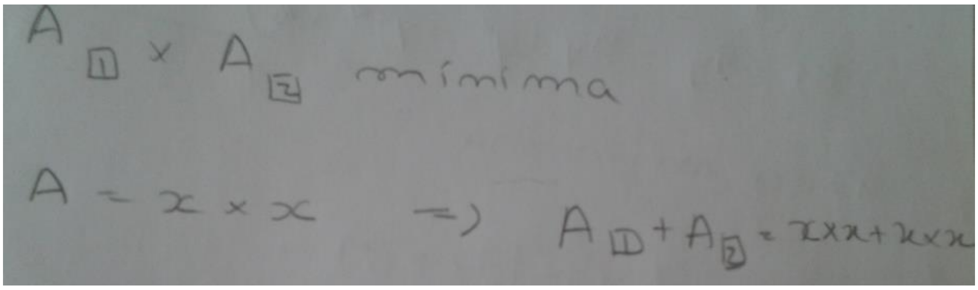


Figura 32 – Resolução do problema relativamente à área (Francisca)

Finalmente a Francisca conseguiu perceber onde é que o seu raciocínio falhava, emendando-o para a representação da fig.33.

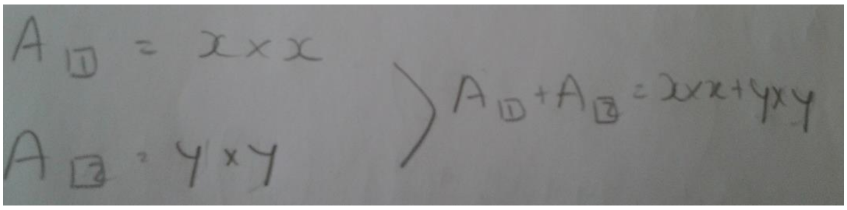


Figura 33 – Resolução do problema relativamente à área, continuação (Francisca)

Nesta etapa inicial do problema, a Francisca apesar de perceber que os quadrados poderiam não ser iguais, não reproduziu a sua ideia corretamente. Tal como já foi referido, neste tipo de problemas as hipóteses são pouco explícitas obrigando os alunos a um tipo de raciocínio a que estes não estão habituados, tal como já foi referido no estudo de caso do grupo 1.

Para continuar a resolução do problema, foi necessário a intervenção da investigadora. Nesta fase a Maria demonstrou ter alguma dificuldade relativamente ao procedimento matemático que era necessário seguir.

Investigadora: E agora o que podemos fazer para continuar? Temos duas condições e duas incógnitas. O que te parece que devemos fazer?

[Maria responde muito a medo e baixinho]

Maria: Não estou a perceber...

Investigadora: Achas que podemos escrever uma variável em função da outra?

Maria: Talvez... mas como e onde ? ai professora não estou a perceber nada...

Investigadora: Então olha lá: temos 36 é igual a quê?

A mesma dificuldade foi sentida pela Francisca e pela Carolina.

Após a escrita das hipóteses as alunas estavam “perdidas” no seu raciocínio não sendo capazes de encontrar sozinhas estratégias para continuar a resolução do problema.

Para que as alunas conseguissem continuar era necessário resolver um sistema de equações pois estava-se perante duas equações com duas incógnitas, contudo foi necessário o auxílio da investigadora para que as alunas conseguissem avançar, estando as três com dificuldade em perceber como sair do impasse em que se encontravam (para as três alunas o estar perante duas equações com duas incógnitas não tinha solução)

Maria: 4 vezes lado1 mais 4 vezes lado2 igual a 36, não é?

Investigadora: Certo. Então e não podemos escrever essa equação sob outra forma? Por exemplo em função de um dos lados?

Maria: Deixe-me escrever ...então temos 4 vezes lado1 igual a 36 menos 4 vezes lado2 é isso que a professora está a dizer?

Investigadora: Muito bem! Então e o que podes concluir?

Maria: Boa!! Já temos uma variável em função da outra, não é? Basta agora simplificar, não é?

Investigadora: Continua estás a ir muito bem!

Maria: Lado1 é igual a 9 menos lado2, [fig. 34].

Investigadora: E agora?

[Maria responde muito baixinho]

Maria: Substituímos?

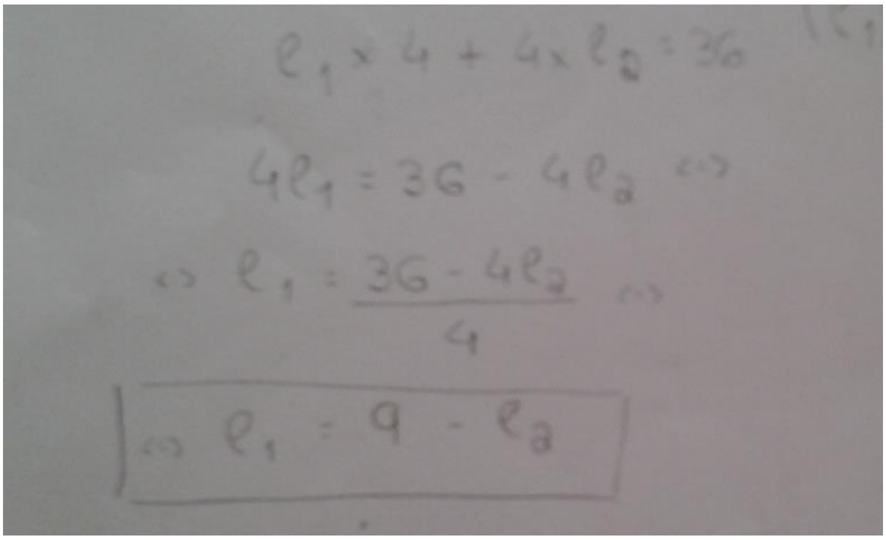


Figura 34 – Resolução do problema relativamente ao perímetro (Maria)

Quer a Maria quer a Carolina, após intervenção da investigadora, conseguiram "sozinhas" perceber como continuar, no entanto, no caso da Francisca foi diferente. Apesar do auxílio da investigadora e de perceber que tinha que escrever uma variável em função da outra a Francisca não compreendeu bem o porquê do que estava a fazer e por essa razão substituiu nas duas expressões a variável.

Investigadora: Conseguimos escrever x em função de y ou vice-versa ou não?!

Francisca: Como assim? [a Francisca reproduziu no papel a figura]

$$A_{quadrado1} + A_{quadrado2} = x^2 + y^2$$
$$= (9 - y) \times (9 - y) + (9 - x) \times (9 - x)$$

Continuo a não ver saída...

Investigadora: Pois! Mas olha bem para o que fizeste! Primeiro foste escrever x em função de y o que está correto! Mas também substituíste y por x!

Francisca: Sim...

Investigadora: Pois mas ao substituíres o x por y e o y por x voltaste à situação inicial!

Francisca: ah! pois é! Então basta substituir uma delas?

Investigadora: Claro...

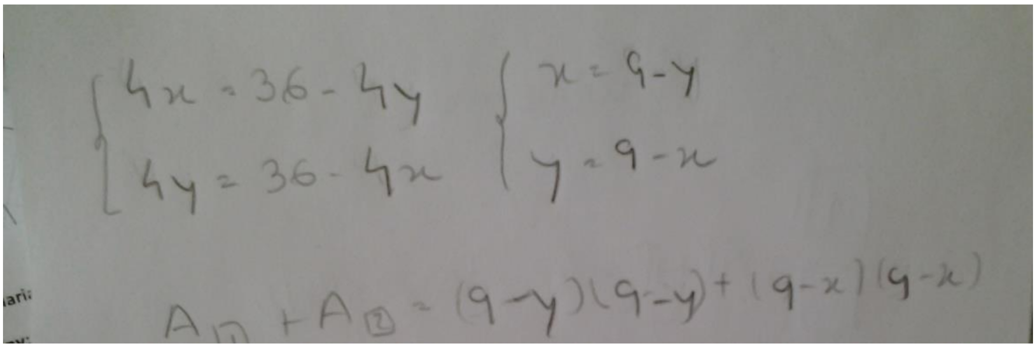


Figura 35 – Resolução do problema relativamente ao perímetro (Francisca)

Francisca: Então a área do quadrado um mais a área do quadrado dois é igual a x ao quadrado mais y ao quadrado. Assim substituindo o x por nove menos y temos nove menos y vezes nove menos y mais y vezes y.

Após uma explicação mais pormenorizada e de relembrar certos conteúdos a Francisca conseguiu corrigir o seu raciocínio, apresentando a expressão pretendia [fig. 36]

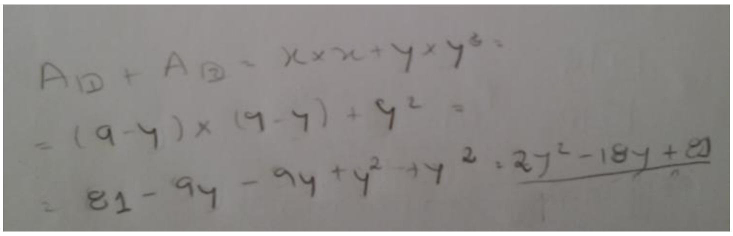


Figura 36 – Substituição da condição sobre o perímetro na equação da área (Francisca)

Nesta etapa do problema em que as alunas conseguiram obter a expressão da soma das áreas, todas se depararam com um problema! Apesar de aparentemente ser visível que a soma das áreas era uma função quadrática nenhuma conseguiu identificar (A Francisca está num processo apenas operacional consegue mobilizar alguns procedimentos algébricos, mas não consegue aplica-los corretamente)) a função como tal. Isso aconteceu não porque as alunas não soubessem identificar uma função quadrática, mas sim porque esta apareceu inserida num contexto diferente. Provavelmente, se esta expressão tivesse aparecido noutro contexto, onde não era designada por área, as alunas conseguiriam identificar a função quadrática,

Como já tinha acontecido em situações de aprendizagem anteriores.quando foram questionadas acerca do porquê dessa dificuldade as alunas deram respostas idênticas, que no contexto do nosso problema não estavam à espera que aparecesse uma função quadrática.

Só depois da investigadora dar pistas acerca da resposta, a Maria percebeu o que tinha que fazer.

Maria: Pois não sei...

Investigadora: O que nos pedem?

Maria: Pedem-nos que a soma das áreas seja mínima

Investigadora: E como vemos isso?

[Maria fica calada a olhar à espera de mais "dicas"]

Investigadora: Então vejamos a expressão que obtiveste é conhecida, não é?

[Maria continua calada...]

Investigadora: Estudámos à pouco tempo.

Maria: [Responde a medo] uma quadrática? [fig. 37]

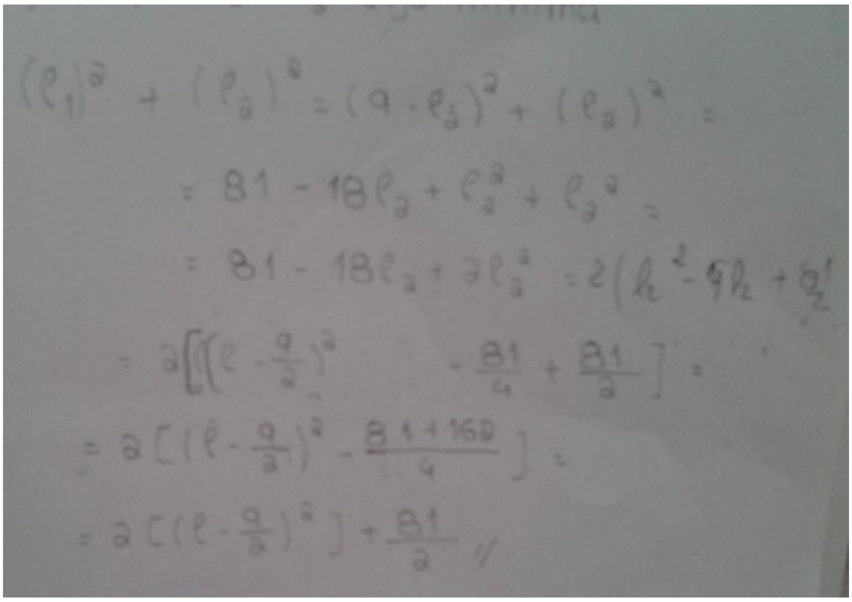


Figura 37 – Substituição da condição sobre o perímetro na equação da área (Maria)

A mesma dificuldade foi igualmente sentida pela Carolina e pela Francisca.

Depois de reconhecerem que a soma das áreas representava uma função quadrática, as alunas foram capazes de avançar para a etapa seguinte, fazendo a ligação com o cálculo do mínimo ou máximo de uma função quadrática, onde teriam de calcular o vértice da parábola. Nenhuma das três alunas teve qualquer dificuldade em obter o vértice, tendo-o calculado conforme aprendido em sala de aula, realizando os cálculos por procedimentos algébricos uma vez que são procedimentos, com os quais estavam familarizadas.

Nesta fase do problema já nenhuma se lembrava do que era pedido de início e portanto ao terem obtido o vértice da parábola deram por concluído o problema.

Quando obteve o vértice, a Carolina respondeu de imediato que então o quadrado iria ter perímetro 9/2.

Carolina: Pronto professora, vamos ter que cortar o fio em 9/2=4,5cm

Investigadora: Carolina pensa lá um bocadinho. O que representa o 9/2?

Carolina: O mínimo?

Investigadora: Sim, mas qual mínimo? Tens que área é igual a duas vezes o quadrado da diferença de x por nove maios mais oitenta e um meios certo?

Carolina: Sim!

Investigadora: Então parece-te que nove meios vai ser o perímetro de um dos teus quadrados?

[A Carolina fica pensativa e depois responde]

Carolina: Não!

Investigadora: Então representa o quê?

[Uma vez mais a Carolina fica a olhar para a investigadora pensativa.]

Carolina: Não estou a perceber!

Investigadora: Vamos então ver o que fizemos até aqui!

[Depois de rever o problema a Carolina responde]

Carolina: Será o lado do quadrado não é?

Investigadora: Pois...

Carolina: Ah! Então como nove meios é o lado do quadrado temos que o perímetro de um dos quadrados vai ser quatro vezes nove meios não é?

Investigadora: Sim...e o que concluis?

Carolina: Então quatro vezes nove meios é igual a dezoito, logo o perímetro de um dos quadrados será 18cm e do outro será trinta e seis menos dezoito que é igual a dezoito, o perímetro do outro quadrado também será 18cm (fig. 38).

Tal como a Carolina, a Maria e a Francisca, deram por terminado o problema quando obtiveram o vértice da parábola encontrada. Após a investigadora lhes ter prestado um apoio idêntico ao prestado à Carolina, as alunas conseguiram concluir o problema corretamente.

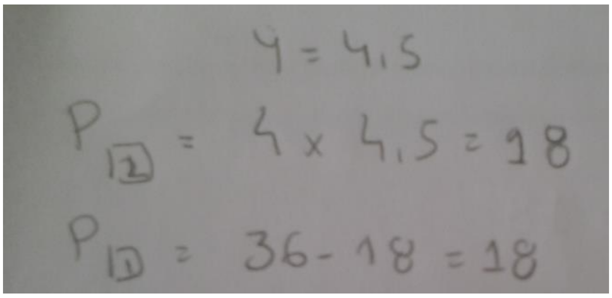


Figura 38 – Conclusão do problema (Carolina)

Quando questionadas acerca da dificuldade deste tipo de problema, tal como a Maria, a Francisca e a Carolina referiram que este foi o problema mais difícil, mas que gostaram imenso de o fazer.

Quando questionadas porquê, a Carolina disse que este tipo de problemas ajuda a melhorar o seu raciocínio abstrato:

Investigadora: Dos três problemas qual foi o que achaste mais dificil?

Carolina: Para mim foi o 1.º problema, mas apesar disso foi o que gostei mais de fazer!

Investigadora: Porquê?

Carolina: Porque tal como diz a professora Teresa este tipo de problemas estimula o nosso raciocinio abstrato!

Tal como referimos a natureza desta tarefa obriga os alunos a estratégias tais como traduzir para linguagem matemática as hipóteses colocadas que se apresentam sob uma forma pouco usual à qual os alunos não se encontram familiarizados, relacionar conhecimentos previamente apreendidos. Nesta tarefa os alunos vêm-se confrontados com a necessidade de se uma passagem do concreto para o abstrato. No entanto essa abstração apenas é possível, segundo Sfard(1987), após uma correta interiorização e operacionalização dos conceitos necessários á realização da tarefa. Tendo em atenção as dificuldades apresentadas pelas três alunas na tarefa "investigando a função quadrática" parece-nos evidente que as alunas ainda se encontram numa fase de interiorização de alguns dos conceitos envolvidos.

Perante estas afirmações e visto esta mesma dificuldade já ter sido expressa pelos alunos do grupo 1, parece-me importante reiterar a ideia de que a inclusão deste tipo de tarefas em sala de aula possibilitaria aos alunos um maior contacto com este tipo de problemas, permitindo desenvolver melhores competências quer na sua compreensão, quer na sua resolução. Para os alunos este tipo de raciocínio é benéfico pois ajuda-os a desenvolverem estratégias de resolução muitas vezes recorrendo a diferentes conteúdos e a estabelecer elos de ligação entre duas ou mais matérias. Na entrevista feita às alunas pudemos constatar que elas partilham desta mesma ideia.

4.2.3 - INVESTIGANDO A FUNÇÃO MÓDULO

A tarefa "Investigando a função módulo" foi proposta a todos os alunos da turma cooperante tendo sido o seu primeiro contacto com a função módulo. Nesta tarefa o principal objetivo era a exploração do comportamento de uma função real $f(x)$ de variável real x definida por:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \ se \ x \geq 0 \\ -x \ se \ x < 0 \end{cases}$$

Assim sendo foi entregue um guião com a proposta da tarefa no qual eram colocadas quatro tarefas que auxiliariam os alunos no seu estudo no qual, o qual deveria ser apresentado num relatório. A referir que para exploração da função módulo foi sugerido aos alunos a utilização da calculadora gráfica.

Após receberem o guião, os alunos tiveram um primeiro momento de hesitação questionando a professora sobre a forma como deveriam introduzir a função módulo na calculadora gráfica.

> *Maria: Professora, já temos o gráfico da função módulo. Está bem assim?*
>
> *Professora: Sim está bem.*

Depois de esclarecidas as suas dúvidas iniciais, as alunas alvo do nosso estudo, conseguiram realizar com sucesso a tarefa, tendo encontrado estratégias apropriadas, não tendo sentido necessidade de escrever a expressão analítica eventualmente porque tal não era solicitado e porque estava definida no guião dado.

Na tarefa dois era pedido aos alunos que estudassem o que acontece ao gráfico da função módulo quando este sofre translações segundo o eixo das abcissas e depois segundo o eixo das ordenadas. Terceira tarefa, os alunos deveriam fazer o estudo do gráfico da função quando esta sofre translações no eixo das abcissas e ordenadas simultaneamente. Nestas duas tarefas este grupo conseguiu arranjar estratégias sem terem recorrido ao auxílio da professora ou investigadora, não sentindo, no entanto, necessidade de fazerem a passagem do concreto para o abstrato, que uma vez mais não era solicitado.

Através das suas conclusões (figura 39) podemos ver que recorreram aos conceitos aprendidos para a função quadrática tendo-os reproduzido para a função módulo. Essa estratégia é muito comum nos alunos quando confrontados com novos conteúdos podendo levá-los a certas incorreções a nível de linguagem matemática. É importante, no entanto referir que apesar da incorreção a nível de linguagem este grupo apresentou uma evolução muito positiva uma vez que no relatório da função quadrática o conceito de vértice não tinha sido devidamente interiorizado. Podemos assim supor que estas três alunas já se encontram numa fase de operacionalização relativamente a este conceito.

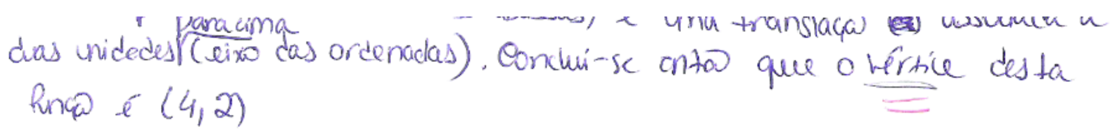


Figura 39 – "*Vértice*" da função módulo (Grupo 2)

É também de salientar a evolução das alunas deste grupo relativamente ao relatório anterior, tendo para a função módulo conseguido identificar e representar de forma correta as translações da função módulo segundo um vetor *(h,k)*, ver fig. 40.

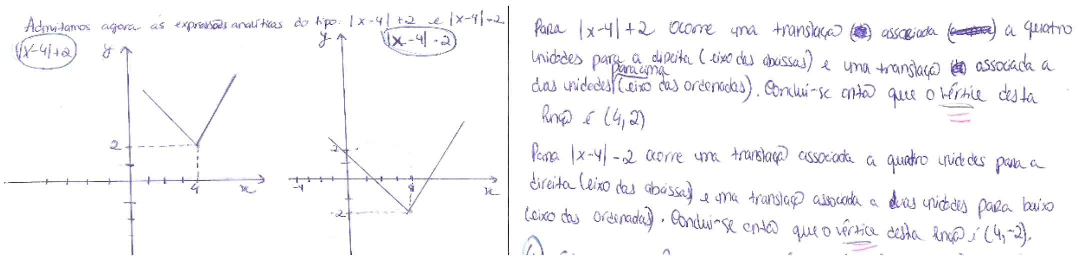


Figura 40 –Translações do gráfico da função módulo (Grupo 2)

Este tipo de translações foi algo que não tinham conseguido estudar/aplicar corretamente no caso da função quadrática.

A tarefa 4 tinha um grau de dificuldade maior uma vez que era pedido que fizessem o estudo da influência de um parâmetro a. Já se observou que este tipo de questões apresentam uma dificuldade acrescida pois a abstração necessária para este tipo de perguntas só é possível quando já existe uma correta reificação do conceito que está a ser aplicado (Sfard 1987)

De referir que na tarefa 4, a não apresentação conjunta no mesmo referencial dos gráficos da função *f(x)=a*|*x*|, (fig. 41), para os diferentes valores de *a* e a falta de rigor no esboçar dos mesmos gráficos, levou as alunas a concluírem, erradamente, que a maiores valores de *a* correspondia uma "maior abertura" do gráfico da função módulo. Isto mostra uma vez mais que os alunos têm tendência a tirar conclusões com base nas representações gráficas que visualizam, não sentido necessidade de se questionarem acerca do resultado obtido. Verifica-se que nesta situação as alunas, ao contrário do que haviam feito para realizarem as tarefas anteriores, não recorreram aos conhecimentos adquiridos no estudo da função quadrática.

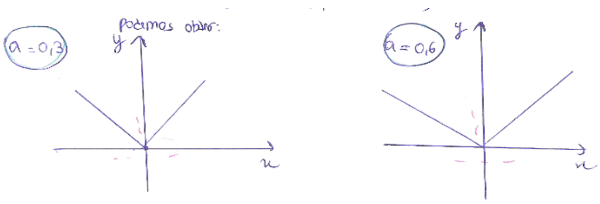


Figura 41 – Variação de *a* no estudo da função módulo (Grupo 2)

No entanto, nas conclusões finais as alunas escreveram exatamente o oposto, (fig. 42), tendo referido de forma correta qual a influência do parâmetro *a*, na abertura da função *f(x)=a*|*x*|.

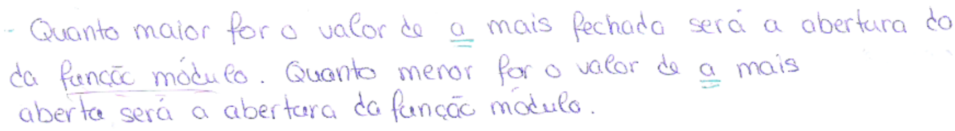

- Quanto maior for o valor de a mais fechada será a abertura do da função módulo. Quanto menor for o valor de a mais aberta será a abertura da função módulo.

Figura 42 – Conclusões sobre a influência de *a* no estudo da função módulo (Grupo 2)

Essa correção nas conclusões poderá dever-se a uma maior reflexão ou eventualmente alguma sugestão de um outro grupo. A nível geral das conclusões podemos dizer que estas estão fracas. A nível da estrutura proposta, o grupo cumpriu apenas em parte não tendo comentado a atividade nem feito autoavaliação. A nível de apresentação e construção frásica verificaram-se melhorias relativamente ao relatório anterior.

Apresentaram estratégias apropriadas e um processo de exploração organizado, quase completo, mas que pode ainda ser melhorado. Foram capazes de identificar as informações e conhecimentos essenciais, tendo alguma dificuldade em aplicá-los principalmente na questão 4, por ser mais geral.

Em relação ao que se verificou no relatório da função quadrática, este grupo evoluiu e demonstrou possuir os conhecimentos necessários para a realização das tarefas, apesar de ter demonstrado ainda algumas dificuldades em conseguir aplicar esses mesmos conhecimentos. Podemos verificar durante o decorrer deste relatório que a substituição de um número por um parâmetro ainda provoca alguma insegurança.

4.2.4 - PROBLEMA O VOO DOS GANSOS

Tal como acontecera no problema da área mínima, este 2.º problema "O voo dos gansos" foi realizado pelas alunas individualmente num horário extra aula. Uma das dificuldades comum às alunas foi a escolha do referencial que fosse adequado à função representada graficamente pelo voo dos gansos. (fig. 43)

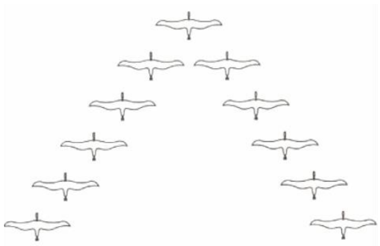


Figura 43 – Esquema de voo de aves em formação (Gansos)

Nenhuma delas percebeu, o que significava desenhar o referencial não tendo sequer desenhado os eixos cartesianos sem o auxílio da investigadora. Relembramos que este foi também uma das dúvidas colocadas pelos alunos do grupo 1 e que tradicionalmente a questão é colocada exatamente ao contrário. É-lhes dado o referencial e os alunos devem de desenhar o gráfico.

Carolina: Escolher um referencial como professora?

Investigadora: Pretendemos que o gráfico apresentado esteja representado num referencial, mas uma vez que este não nos é dado inicialmente, tens que ser tu a desenhar um.

Carolina: Ah! Está bem...

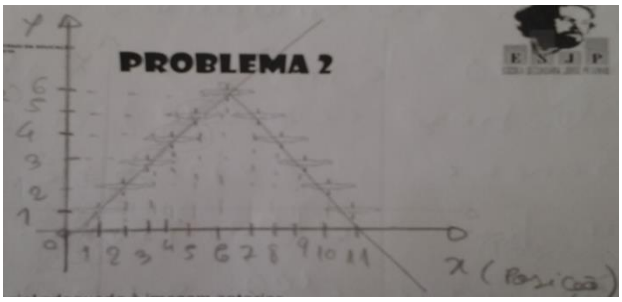


Figura 44 – Representação gráfica do *voo dos gansos* (Carolina)

Quer a Carolina (fig. 44), quer a Francisca desenharam o referencial corretamente, mas apenas a Maria (fig. 45) desenhou o referencial da forma mais natural com o ponto de inflexão da função módulo na origem.

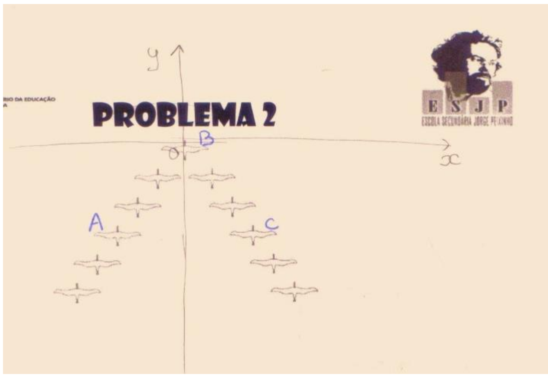


Figura 45 – Representação gráfica do *voo dos gansos* (Carolina)

Na 2.ª questão na qual era pedido que identificassem qual a função que estava representada, as alunas mostraram-se muito inseguras demorando a responder, a Carolina disse que parecia o módulo mas ao contrário.

Carolina: Não estou a perceber professora! Uma função que descreva a figura?

Investigadora: Vejamos... tinhas uma figura, certo? Pediram para desenhares um referencial o que já fizeste. Agora pretende-se que olhes para a figura que simboliza o voo dos gansos e que relaciones esta figura com uma função que conheças!

[A Carolina olha para a investigadora com um olhar aflito...]

Carolina: Desculpe professora mas continuo a não perceber...

[A investigadora levanta-se e vai ao quadro desenhar uma parábola]

Investigadora: Se eu tiver esta figura e pedir para me disseres que função descreve esta figura o que me respondes?

Carolina: Que é uma parábola e por isso deve ser a função quadrática.

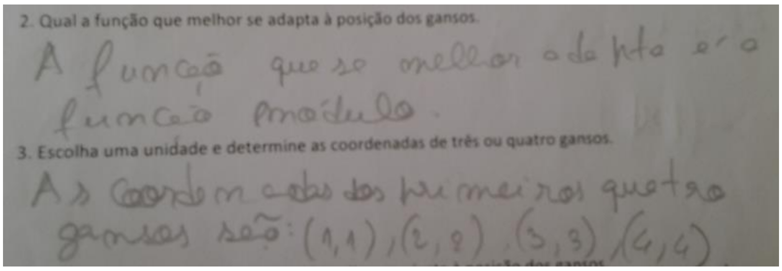
Investigadora: Certo! Então agora olha para a tua figura. que função achas que representa?

Carolina: Parecesse com a função módulo (fig. 45)

Carolina: Para ser sincera parece-me mais o contrário do módulo mas devo estar enganada...

Investigadora: Não! Não estás!

*Carolina**:** Então é o contrário do módulo? Quero dizer o simétrico?*


2. Qual a função que melhor se adapta à posição dos gansos.

A função que se melhor adapta é a função módulo.

3. Escolha uma unidade e determine as coordenadas de três ou quatro gansos.

As coordenadas dos primeiros quatro gansos são: (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)

Figura 46 – Identificação da função que representa o *voo dos gansos* (Carolina)

Depois de um pequeno dialogo com a investigadora, como mostra a transcrição feita acima, as alunas continuaram a resolução do problema.

Na questão seguinte era pedido que as alunas deteminassem três coordenadas no referencial escolhido, o que não lhes trouxe qualquer dificuldade. Dos pontos escolhidos para determinar as coordenadas, houve um que foi comum à Francisca e à Maria, o ponto de inflexão da função módulo. A Carolina optou por escolher outros três pontos (1,1), (2,2), (3,3)(fig. 46).

Na última questão, os alunos tinham que definir analiticamente a função identificada anteriormente. Ao chegar a esta etapa e depois de cada uma das alunas ter verificado que a função que representava o voo dos gansos era uma transformação da função módulo, era suposto as alunas utilizarem os conhecimentos já adquiridos da função módulo para definirem a função neste problema, contudo não foi isso que se verificou. A Carolina (fig. 47) e a Francisca, para definirem a função simétrica do módulo, consideraram que a função traçada era definida a partir de duas retas e como tal para as definir aplicaram os seus conhecimentos acerca de como definir uma equação da reta.

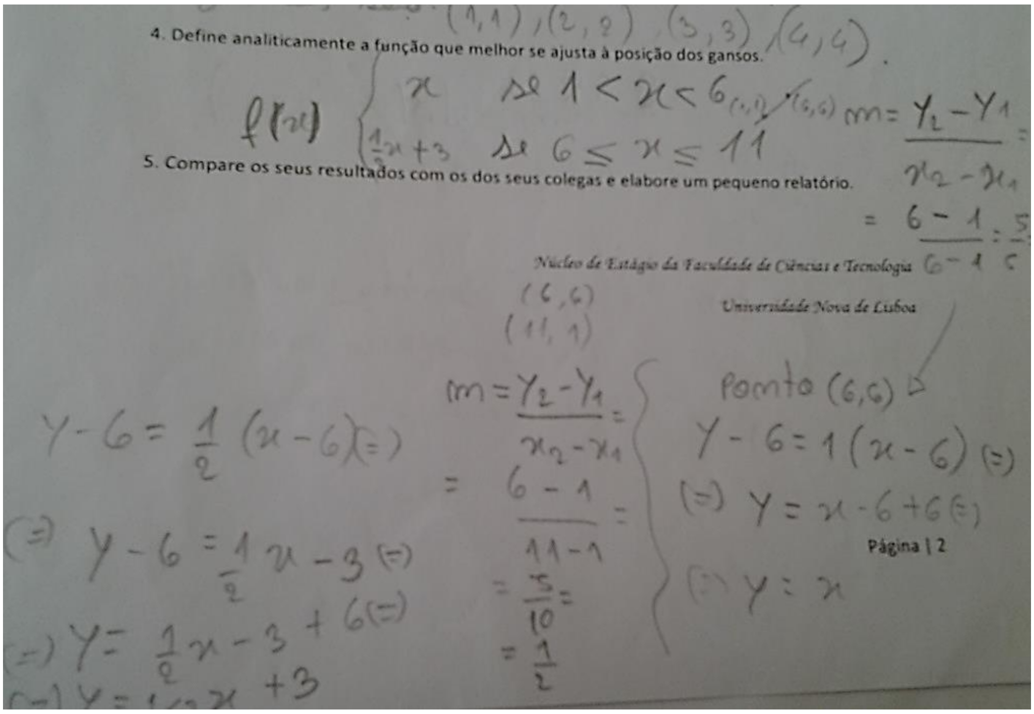


Figura 47 – Representação analítica do *voo dos gansos* (Carolina)

Apesar de terem conseguido identificar que o voo dos gansos podia ser definido por uma função módulo (neste caso o simétrico) a Carolina e a Francisca optaram por definir analiticamente a função através das equações de duas retas, conseguindo fazer corretamente a ligação entre os dois conteúdos. Após a resolução desta alínea por parte das alunas a investigadora indagou-as acerca do porquê daquela resolução.

Investigadora: Porque estás a fazer isso assim?

Carolina: Então porque temos duas retas, esta que tem declive positivo e que eu já calculei e deu 1 e esta que tem declive negativo e que é igual a 1/2

Investigadora: Sim eu percebi o que fizeste... só não vejo porque razão não foste utilizar o facto de a função ser um módulo como tu tão bem reconheceste...

Carolina: Pois...mas dessa forma não sei como fazer…

Apenas a Maria definiu a função tentando aplicar os conhecimentos que tinha sobre a função módulo. Numa primeira tentativa e depois de perceber que a função que estava representada era a função módulo a Maria começou por escrever a definição utlizada na tarefa de investigação “investigando a função módulo”, comentando ao mesmo tempo que o fazia que não era aquela a representação correta pois o gráfico não era assim era ao contrário. Com este comentário e um sinal positivo da investigadora a Maria apresentou a definição indicada na figura (fig. 48).

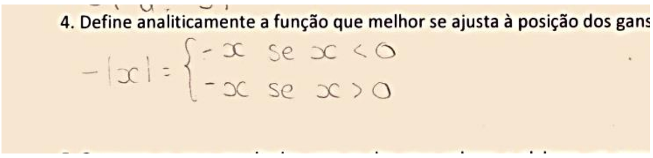


Figura 48 – Representação analítica do *voo dos gansos* (Maria)

Neste segundo problema um dos objetivos era as alunas serem capazes de reconhecerem a função módulo numa representação gráfica diferente das estudadas em sala de aula, o objetivo inicial era as alunas serem capazes de definir o simétrico da função módulo recorrendo ao estudo exploratório “investigando a função módulo” realizado anteriormente. A função deveria ser definida a recorrendo à da definição de função módulo e ao efeito produzido pelas translações e transformações de funções que tinham estudado. Tendo em atenção o objetivo e a resolução apresentada pela Carolina e Francisca (apesar de a resolução da questão 4 não estar errada) perguntamo-nos se as alunas terão percebido realmente a função módulo aquando da realização do relatório.

Outro dos objetivos era o de conseguirem perceber como desenhar um referencial quando lhes é apresentada uma figura que representa algo do quotidiano. Esta ligação de acontecimentos do nosso quotidiano que se podem representar matematicamente é importante para que os alunos consigam fazer conexões entre as diferentes áreas de estudo da matemática. Tal como aconteceu no problema da área mínima vemos que os alunos sentem dificuldade em encontrar estratégias de resolução das tarefas quando estas não vêm apresentadas num contexto diferente daquele a que estão habituados.

Uma vez mais se torna claro que a introdução deste tipo de atividades em sala de aula ajudaria as alunas a terem uma maior desenvoltura na resolução deste tipo de problemas.

4.2.5 - ÀS VOLTAS COM FUNÇÕES POLINOMIAIS

A tarefa “Às voltas com funções polinomiais” foi proposta a todos os alunos da turma cooperante tendo sido o seu primeiro contacto com a funções polinomiais de grau superior a 2. Nesta tarefa o principal objetivo era a exploração do comportamento dos diferentes parâmetros numa família de funções reais $f(x)$ de variável real x definidas por

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \; com \; a \neq 0$$

Para auxiliar os alunos nesse estudo a tarefa é composta por quatro partes que têm o intuito de auxiliar os alunos na execução da tarefa, sendo a última uma generalização. No final os grupos apresentaram o seu trabalho num relatório. A referir que para esta tarefa foi aconselhado aos alunos a utilização da calculadora gráfica.

Tal como era proposto na tarefa 1, as alunas começaram por estudar as funções definidas pelas expressões analíticas $f(x) = x^3$ e $f(x) = -x^3$, não tendo mostrado dificuldades na obtenção das respostas aos vários itens da tarefa. O mesmo se passou quando estudaram as funções definidas pelas expressões analíticas $f(x) = (x - 2)^3$ e $f(x) = (x + 2)^3$ não tendo, no entanto feito nenhuma referência relativamente à translação do gráfico destas funções relativamente ao da função $f(x) = x^3$. Refira-se que essa ponte não era pedida e tal como aconteceu em todas as tarefas propostas ao grupo, as alunas não sentiram necessidade de o fazerem. Ou seja, o estudo destas funções foi realizado de forma autónoma e independente do das funções anteriores, $f(x) = x^3 \ e\, f\ (x) = -x^3$, mostrando que os alunos conseguem aplicar o conceito de translação ao gráfico de uma função quando este é explicitamente referido, como no caso do estudo da função módulo, não sendo capazes de aplicar e relacionar os conteúdos quando tal não é solicitado. Uma vez mais se observa a tendência que os alunos têm em fazer apenas o que é pedido não tendo um espírito crítico e compartimentando conteúdos (Kieran 2006, 2007).

Na 3ª. Tarefa proposta apenas à a referir o facto das alunas terem optado por calcular os zeros da função real de variável real $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ quando o poderiam ter feito diretamente na calculadora gráfica. Apesar de terem calculado bem os zeros desta função, os intervalos de monotonia estão mal representados ficando no ar a questão de se as alunas perceberam como se vê os intervalos de monotonia.

No estudo da função definida pela expressão analítica geral, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, as alunas não foram capazes de delinear uma estratégia que lhes permitisse fazer o estudo pedido, não tendo, no entanto, pedido o auxílio da professora ou da investigadora. Tendo em atenção essa atitude, questionamo-nos se no seu entender não estariam a utilizar as estratégias corretas. Ao não optarem por fazer variar um parâmetro de cada vez, mantendo todos os outros fixos, não conseguiram captar todas as modificações que a alteração de cada parâmetro produz no gráfico da função. Além disso o, a estratégia adotada de fazer variar todos os parâmetros de uma só vez levou à obtenção de conclusões que não estão corretas (fig. 49). A título de exemplo, as alunas concluem que com todos os parâmetros positivos a função é crescente e com todos os parâmetros negativos a função é decrescente.

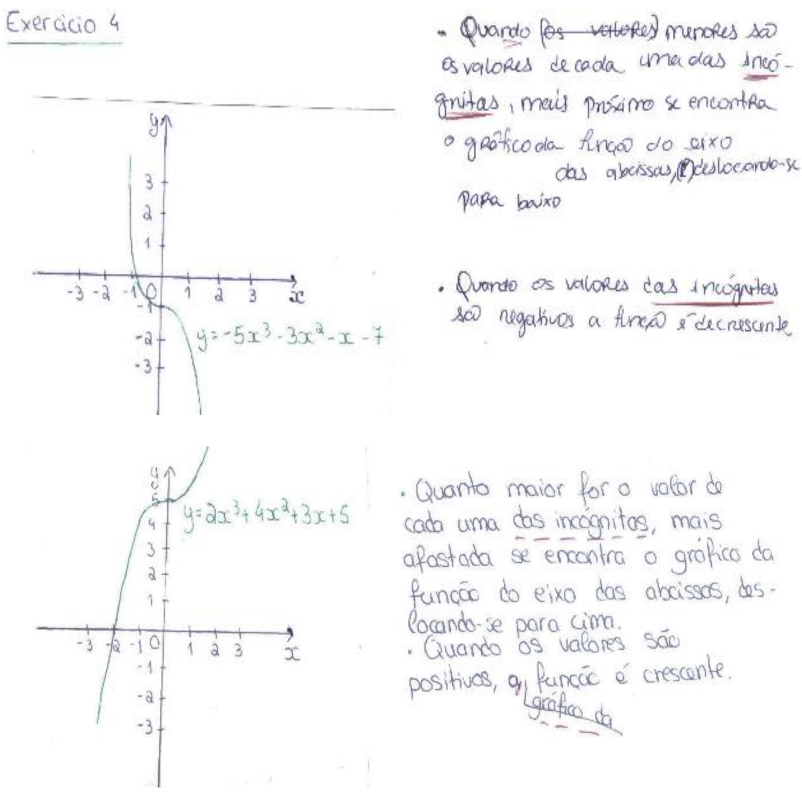


Figura 49 – Monotonia da função polinomial (Grupo 2)

Ao contrário do que aconteceu nas tarefas anteriores, relativamente à função quadrática e à função módulo, estas alunas não conseguiram atingir o objetivo desta tarefa, o qual era perceber qual a influência dos parâmetros a, b, c e d na função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Uma das razões pode ser o facto de termos um maior número de parâmetros o que parece ter confundido as alunas, levando-as inclusive a cometer algumas incorreções na linguagem matemática ao trocarem a designação de "parâmetros" por "incógnitas", que não se verificou nas tarefas anteriores (fig. 50).

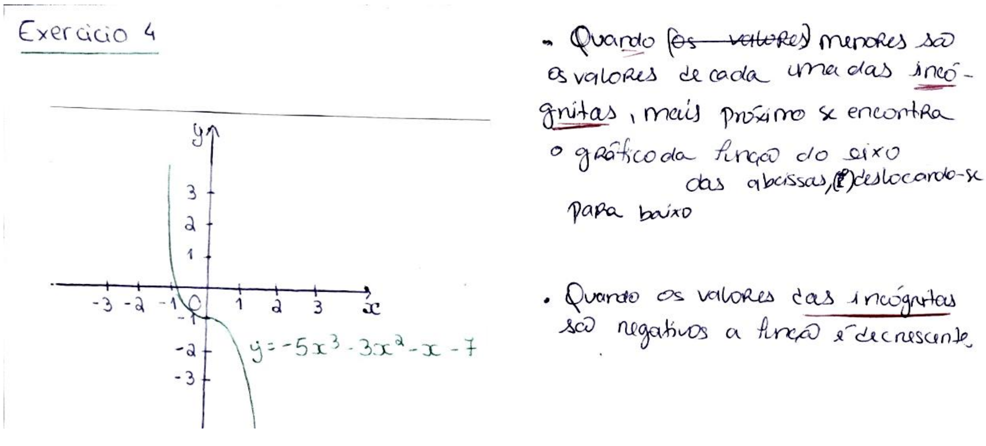


Figura 50 – Confusão entre parâmetros e incógnitas na função polinomial (Grupo 2)

Como estavam perante uma tarefa onde os coeficientes da função polinomial eram parâmetros aos quais deveriam atribuir diferentes valores, cometeram a imprecisão de os designarem por incógnitas deixando transparecer que nem sempre os alunos conseguem diferenciar totalmente os parâmetros das variáveis de uma função.

Para as alunas que integram o grupo 2 este foi o relatório que mais gostaram de realizar pois segundo elas, já não tinham dúvidas quanto à estrutura que deveriam seguir e foi onde mais aprenderam.

No entanto detetámos ainda algumas incorreções a nível matemático tais como a incorreta utilização da palavra incógnita em vez de parâmetro e os intervalos de monotonia da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

O grupo respeitou em parte a estrutura proposta para apresentar o relatório, faltando os comentários com a autoavaliação. Apresentaram estratégias apropriadas e um processo de exploração organizado e quase completo, tendo falhado no estudo sistematizado da função definida pela expressão analítica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Ao analisar todo o trabalho realizado pelo grupo constatámos que analisaram corretamente os gráficos obtidos na calculadora gráfica sendo capazes de indicar corretamente os zeros de cada uma das funções apresentadas assim como o seu domínio e contradomínio. No entanto e tal como já foi referido, as alunas apenas se focaram no que era diretamente pedido nas diferentes tarefas não sendo capazes de utilizar os conteúdos já estudados para as funções quadráticas e módulo, nomeadamente as translações dos gráficos das funções por ação de vetores. Ao não terem feito essa analogia não se aperceberam na nossa opinião da estratégia a seguir na última tarefa não compreendendo corretamente qual o efeito que cada um dos parâmetros tem na função.

Uma vez que o objetivo principal desta tarefa de investigação era o de estudar a capacidade que os alunos têm de compreender e identificar o mesmo conceito em diferentes representações, de forma a aumentar o seu poder de abstração somos levados a concluir que relativamente às funções polinomiais de grau superior a 2, as alunas deste grupo ainda se encontravam numa fase de interiorização.

De referir como ponto negativo, algo que se verificou neste relatório e que nos outros dois realizados não aconteceu. Pelo facto das tarefas serem extensas, as alunas do grupo dividiram o trabalho pelas três, respondendo cada uma a uma questão. No entanto verificou-se que mesmo tendo adotado esta posição, sempre que havia um impasse ou dúvida esta era resolvida no grupo.

Com a realização destas tarefas, que foram alvo do relatório foi possível perceber quais os conteúdos que as alunas compreenderam e quais aqueles em que é necessária uma intervenção diferenciada. Penso que sem o trabalho realizado pelas alunas, provavelmente a docente não tomaria conhecimento destas suas dificuldades.

Como ponto positivo podemos referir o facto deste grupo não ter necessitado de auxílio na utilização da calculadora gráfica tendo conseguido manuseá-la corretamente durante o decorrer da tarefa.

4.2.6 - PROBLEMA DE ADMINISTRAÇÃO DE ANTIBIÓTICOS

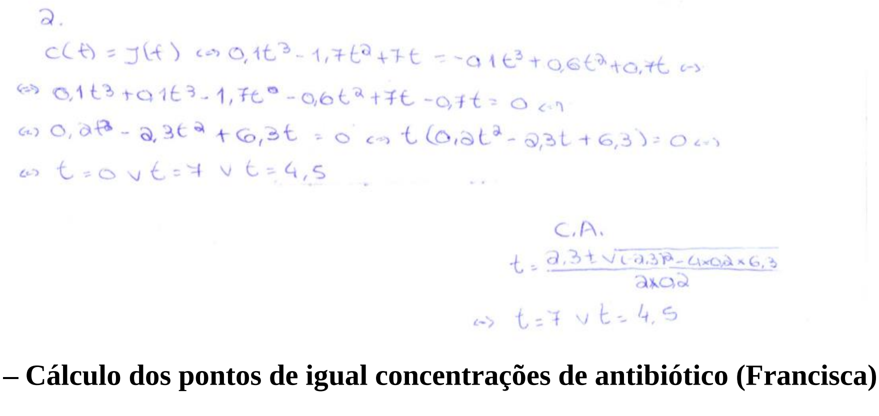
Tal como o problema 1 e 2, este problema foi feito individualmente por cada umas das alunas tendo sido feito em horário extra-aula. Este problema tinha dois objetivos principais: o de perceber a evolução dos alunos na utilização da calculadora gráfica e a interpretação gráfica a partir desta e o de ver o desempenho das alunas perante um problema da vida real no qual se utilizam ferramentas já estudadas relativamente a funções reais de variável real.

Neste 3.º problema são dadas duas funções polinomiais do 3.ºgrau que representam concentrações de um antibiótico no sangue da Clara (*C(t)*) e do Joaquim (*J(t)*), em *mg/l* de sangue e *t* horas após a toma.

Neste problema os alunos deveriam recorrer à calculadora gráfica para responder às questões propostas.

Na 1.ª alínea pedia-se aos alunos que calculassem a concentração do antibiótico, no sangue da Clara, 15 minutos depois de ser administrado. Os alunos tinham que ter em atenção que a variável *t* está expressa em horas, assim sendo tinham que substituir *t* por ¼ de hora, ou seja, 0.25. As alunas resolveram esta 1.ª questão sem dificuldades não havendo nenhum auxílio por parte da investigadora.

Na 2.ª questão era necessário determinar ao fim de quanto tempo é que as concentrações de antibiótico no sangue da Clara e do Joaquim são iguais. A Francisca (fig. 51) e a Maria resolveram-na analiticamente.



2.

$C(t) = J(t) \Leftrightarrow 0{,}1t^3 - 1{,}7t^2 + 7t = -0{,}1t^3 + 0{,}6t^2 + 0{,}7t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}1t^3 + 0{,}1t^3 - 1{,}7t^2 - 0{,}6t^2 + 7t - 0{,}7t = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}2t^3 - 2{,}3t^2 + 6{,}3t = 0 \Leftrightarrow t(0{,}2t^2 - 2{,}3t + 6{,}3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 7 \vee t = 4{,}5$

C.A.

$t = \frac{2{,}3 \pm \sqrt{2{,}3^2 - 4 \times 0{,}2 \times 6{,}3}}{2 \times 0{,}2}$

$\Leftrightarrow t = 7 \vee t = 4{,}5$

Figura 51 – Cálculo dos pontos de igual concentrações de antibiótico (Francisca)

Ao optarem por resolver analiticamente esta alínea a Maria e a Francisca mostraram que ainda não se sentem totalmente à vontade com a calculadora gráfica. Por outro lado, podemos constatar que as alunas compreenderam o que era pedido, tendo ido igualar as duas funções C e J de modo a obterem o instante, no tempo, em que as concentrações de antibiótico no sangue da Clara e do Joaquim eram iguais, demonstrando compreender o raciocínio subjacente à resolução deste tipo de questões. Ao não terem recorrido ao auxílio da investigadora demonstraram uma confiança no seu saber o que é uma evolução em relação aos dois problemas anteriores.

Na questão seguinte as alunas tinham de determinar em qual dos dois sujeitos considerados, a concentração de antibiótico no sangue ultrapassa primeiro o valor de 7,5mg/l. No caso de algum dos sujeitos ultrapassar é necessário indicar em quanto é ultrapassado esse limiar.

Nesta questão, as três alunas tiveram dificuldades. Uma das dificuldades apresentada pelas alunas foi a não compreensão do que fazer. Outra é como resolvê-la, uma vez que estamos perante duas inequações com polinómios do 3º grau. Nenhuma conseguiu sozinha perceber como iria resolver graficamente o problema.

> *Maria: Professora não percebo o que é para fazer aqui!*
>
> *Investigadora: Então vejamos...o que pretendemos?*
>
> *Maria: Pretendemos saber qual dos miúdos sofre de efeitos secundários*
>
> *Investigadora: Pois isso é o que diz o problema! E como vemos isso?*

[A Maria fica durante uns segundos calada a olhar para a investigadora e diz:]

> *Maria: Vemos se eles têm uma concentração superior a 7.5?*
>
> *Investigadora: Até aqui tudo certo! Então e como vamos ver isso?*
>
> *Maria: Pois aí é que está o problema!!*
>
> *Investigadora: Então não temos que ver se a concentração de medicamento na Clara passa os 7,5? E o mesmo para o Joaquim?*

Após esta conversa com a investigadora, a Maria percebeu quais as inequações que tinha que resolver. Ao reparar que se tratavam de inequações com polinómios do 3º grau a Maria ficou aflita.

> *Maria: Oh professora! Eu não sei resolver isto! temos* x^3 *...*
>
> *Investigadora: Pois! e o que diz o enunciado? Resolver recorrendo à calculadora...*
>
> *Maria: Pois...*

Tal como a Maria, as colegas também tiveram dificuldades em perceber o que era pretendido e como iriam resolver na calculadora o problema. Uma vez mais as alunas viram-se perante enunciados que não conseguiam traduzir matematicamente. É importante notar que nos manuais escolares prevalecem exercícios ou problemas mais direcionados, e por essa razão quando confrontadas com algo menos direcionado as alunas têm dificuldades em interpretar uma vez que a sua ferramenta de trabalho é exclusivamente o manual adotado.

Outro dos problemas da Francisca e da Maria foi o de terem que analisar mais do que uma função no mesmo gráfico. Neste caso, era necessário a introdução de três funções diferentes na mesma janela o que as deixou muito confusas.

Francisca: Já está professora...agora abro outra "página" para desenhar a do Joaquim, não é?

Investigadora: E como as ias comparar?

Francisca: Tenho que fazer aqui nesta? Mas como?

[A investigadora auxiliou a Francisca]

Investigadora: E agora o que pretendemos?

Francisca: Ver quais ultrapassam os 7,5...

Investigadora: E como vais fazer isso?

[A Francisca fica a olhar para a investigadora com uma expressão aflita]

Investigadora: Estes 7,5 representam o quê?

Francisca: A concentração

Investigadora: E no nosso gráfico onde podemos ver os valores da concentração?

Francisca: No eixo dos yy, das ordenadas.

Ao chegar a esta etapa apenas a Maria (fig. 52), conseguiu responder sem ajuda à questão colocada. Quer a Carolina quer a Francisca não perceberam em quanto é que a Clara ultrapassava a concentração considerada.

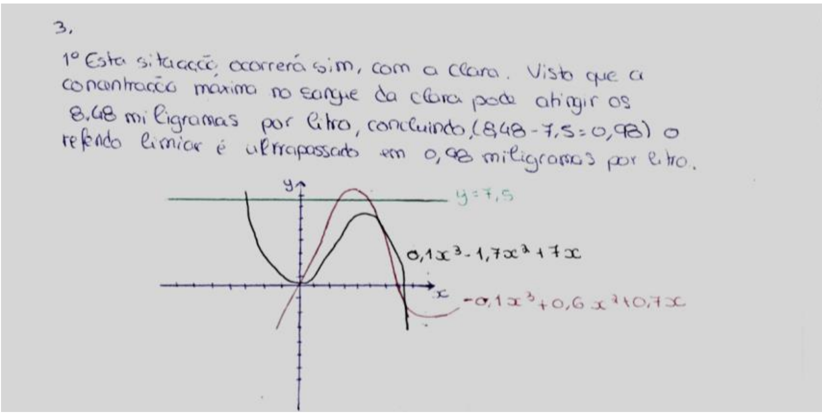


Figura 52 – Representação gráfica das concentrações de antibióticos e do limiar de 7.5 mg/l (Maria)

Carolina: Professora já vi que a Clara ultrapassa o limite de 7,5. E agora como respondemos à parte de em quanto é que a concentração ultrapassa os 7,5?

Investigadora: Pensa lá Carolina... olha para o teu gráfico...

Carolina: É este bocadinho aqui?

Carolina aponta para a parte do gráfico, (fig. 53), que está acima da linha que representa o y=7,5mg/l.

Investigadora: Vês como sabes?

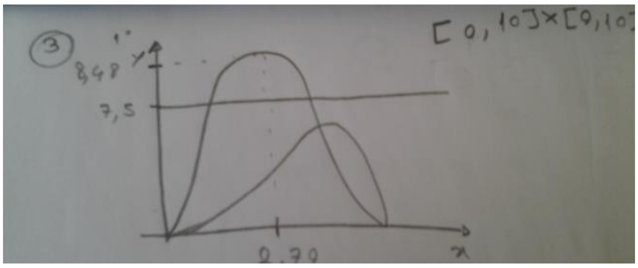


Figura 53 – Representação gráfica das concentrações de antibióticos e do limiar de 7.5 mg/l (Carolina)

Com a Francisca a situação foi semelhante. Após uma leitura mais cuidada do gráfico obtido a Francisca conseguiu responder corretamente à pergunta colocada.

Uma vez mais, verificou-se que as alunas não se encontram muito à vontade no que diz respeito à leitura e interpretação dos gráficos, nomeadamente dos gráficos obtidos na calculadora gráfica, provavelmente porque as funções polinomiais era um conteúdo novo que ainda não tinha sido muito trabalhado em sala de aula, sendo este problema o seu primeiro contacto com problemas da vida real onde se aplica funções polinomiais de grau 3 e que requer o uso da calculadora obrigatoriamente em algumas das alíneas. Sendo estas alunas com pouco confiança em si, tal como referido na sua caraterização esse desconhecimento desperta nelas uma indecisão no momento de responder. Relembremos que estas alunas na tarefa “às voltas com as funções polinomiais” não conseguiram atingir os objetivos da última questão. Podemos afirmar assim que no momento da realização desta tarefa as alunas ainda se encontravam em processo de interiorização acerca da função dos parâmetros nas funções polinomiais.

Na questão seguinte, era necessário determinar quando é que a Clara e o Joaquim voltavam a ter concentrações de medicamento iguais, nenhuma aluna do grupo teve dificuldades uma vez que a resolução era muito semelhante à resolução da alínea anterior, não tendo sido necessário auxílio ou esclarecimento por parte da investigadora.

Ao questionarmos as alunas acerca desta tarefa, elas referiram que gostaram muito deste problema, principalmente porque conseguiram experienciar como resolver um problema graficamente.

4.2.7 - VISÃO DOS ALUNOS RELATIVAMENTE À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E À ELABORAÇÃO DOS RELATÓRIOS

Quando questionadas na entrevista acerca do que sentiram na realização das atividades propostas que visavam a elaboração dos relatórios, as três alunas afirmaram que uma das dificuldades sentidas foi o não conhecimento do funcionamento da calculadora gráfica. Tal como foi apontado pelos alunos do grupo 1, outra dificuldade sentida pelas três foi a de encontrar estratégias adequadas quando as questões propostas envolviam parâmetros. É importante aqui referir que tal como já se havia constatado no outro grupo, o grau de dificuldade que sentiram em encontrar estratégias diminuiu ao longo das atividades, como refere a Maria:

> *Maria: Sim acho que quer da minha parte quer do grupo houve evolução. No 1º tivemos muitas dificuldades em perceber o que era para fazer e quais as funções a usar. Nos outros relatórios já sabíamos mais o que fazer e acho que correu melhor.*

Para a Carolina no entanto, a tarefa do 2.º relatório foi ainda muito difícil.

> *Investigadora: Sentiste muitas dificuldades nas três tarefas?*
>
> *Carolina: Um bocadinho... não estava habituada a sermos nós a ver a matéria sozinhos.*
>
> *Investigadora: Como assim?*
>
> *Carolina: Por exemplo, no relatório do módulo tivemos que fazer tudo sem a professora Teresa ter dado a matéria. Foi muito giro mas achei um bocadinho complicado pois não sabia se estávamos a fazer bem! E depois houve a parte de ter que fazer um relatório em matemática, o que nunca tinha feito! Foi difícil de vermos o que escrevíamos nos objetivos, na introdução, nas críticas...*

As outras duas colegas partilham da mesma opinião de que uma das dificuldade tem por base a não familiarização com este tipo de tarefas:

> *Maria: Um bocadinho... não estava habituada a sermos nós a ver a matéria sozinhos.*

Outra das dificuldades apresentadas foi o da elaboração do relatório em si. As alunas afirmaram que tiveram dificuldades em transmitir os seus conhecimentos e em seguir o guião dado para a elaboração do relatório.

> *Maria: No 1º nem sabíamos o que escrever nos objetivos nem como seguir a estrutura. Mesmo assim nos comentários e nas críticas nunca conseguimos perceber muito o que deveríamos dizer...*
>
> *Investigadora: Então e nos restantes relatórios?*
>
> *Francisca: O que mais me custou foi mesmo saber o que escrever...nos objetivos e nos comentários tinha sempre muitas dúvidas mesmo no 2.º e no 3.º. Dessa parte não gostei mesmo!! Acho que se fizesse mais continuava a não gostar e a não saber o que escrever...*

Relativamente ao uso da calculadora gráfica, apenas a Carolina refere que a dificuldade que sentiu no primeiro relatório foi desaparecendo:

> *Carolina: No primeiro relatório eu era a única que tinha calculadora por isso fui "obrigada" a habituar-me a trabalhar com a máquina pois as minhas colegas tinham medo de "estragar"... acho que foi por causa disso que acabei por não sentir dificuldades quando a tive que usar nos outros relatórios.*

Quando questionadas acerca do que pensaram da realização dos relatórios e se consideraram essas atividades benéficas, todos os elementos do grupo afirmaram que sim. Todas afirmam ter gostado da realização das tarefas exploratórias e até da elaboração dos relatórios, apesar de terem sentido alguma dificuldade na sua elaboração. Essa dificuldade está associada ao facto de este tipo de atividade escrita ser uma prática pouco utilizada pelos professores nas aulas de Matemática.

> *Investigadora: O que acharam destas tarefas das quais vos foi proposto fazerem relatórios?*
>
> *Maria: Eu gostei! Mesmo da parte dos relatórios...acho que este tipo de atividades ajuda-nos muito! O facto de sermos nós a pensar por nós e não estarmos apenas a ouvir a professora faz-nos querer ser melhores!*
>
> *Investigadora: E achas que foi benéfico? Conseguiste aprender o que foi proposto?*
>
> *Carolina: Acho que aprendi muito! Acho que todos aprendemos! O sermos obrigados a arranjar forma de responder às perguntas principalmente aquela das letras obriga-nos a raciocinar e eu acho que nós fixamos muito mais assim!*

Tal como já havíamos constatado no outro grupo, para estas alunas o facto de serem obrigadas a refletir e a encontrar estratégias que as auxiliassem na resolução das tarefas proporcionou-lhes uma compreensão mais profunda dos temas estudados.

Quando questionadas se gostariam que este tipo de tarefas fosse incluído como prática letiva, as três concordaram que tal procedimento seria importante.

> *Investigadora: Gostarias de ver este tipo de atividade incluída nas atividades letivas?*
>
> *Francisca: Gostava. Acho que seria bom fazer este tipo de atividades. A maioria acha que a matemática não é divertida e acho que com este tipo de atividades até esses ia gostar mais da matemática.*
>
> *Investigadora: Porque dizes isso?*
>
> *Francisca: Foi isso que aconteceu com colegas meus lá da turma...*

As três alunas acham importante a realização dos relatórios para a sua aprendizagem. Na sua opinião, este tipo de instrumento deveria ser incluído nas aulas de matemática mais vezes e deveria de "contar" para a nota final retirando peso dos testes sumativos.

A Carolina gostou muito da experiência de realizar relatórios e de resolver os problemas propostos. Notou-se com o decorrer deste tipo de atividades que a Carolina foi ficando mais confiante no seu saber e menos ansiosa.

Em relação à avaliação, a Carolina gostaria que os testes não tivessem um peso tão significativo na nota e gostava de ver outros instrumentos introduzidos, como é o caso dos relatórios.

Carolina: Acho que devíamos fazer relatórios de vez em quando. E que deviam contar para nota. Temos tanto trabalho e depois a nota é só os testes...se fazemos asneira pronto!

As outras alunas concordam com a opinião expressa pela Carolina de que os relatórios e as tarefas de índole exploratória deveriam ter algum peso na sua avaliação, retirando o peso excessivo, na opinião delas, dos testes.

Quando questionadas acerca do que pensavam das sessões de trabalho individuais nas quais foi proposta a resolução de três problemas, as alunas afirmaram ter gostado muito de participar nessas sessões destacando-se a Carolina que afirma ter sido um privilégio ter sido selecionada para estas sessões extra-aula, pois como a própria afirma, veio aumentar a sua autoconfiança e aumentar os seus conhecimentos.

Investigadora: Depois de terminadas as nossas sessões onde em cada uma resolvemos um problema gostava que me dissessem o que sentiram?!

Carolina: Eu gostei muito! Foi um privilégio ter sido convidada a participar nestas sessões. Como a Professora Teresa referiu relativamente aos relatórios nós fomos uns privilegiados por termos tido a oportunidade de trabalhar os conteúdos desta forma. Em relação a estas sessões sinto o mesmo! Ajudaram-me muito! A professora sabe que eu não tenho muita confiança em mim!

Investigadora: Sim Carolina! Eu sei isso! Se fosses menos ansiosa de certeza que tinhas mais facilidade nas avaliações!

Carolina: Sim é verdade! Mas com estas sessões sinto-me um bocadinho mais segura! Agora nas aulas não tenho tanto medo de responder...

A Maria e a Francisca apenas referiram que gostaram muito mas que sentiram algumas dificuldades.

Maria: Eu gostei muito de participar professora, mas houve partes muito complicadas... senti-me mesmo mal quando ficava sem saber o que fazer...

Investigadora: Então porquê?

Maria: Porque tirando o último problema nem sabia como começar... os enunciados não eram nada fáceis...ou então é por não estarmos acostumadas...

Investigadora: Pois ou isso! São diferentes daqueles com que estás familiarizada! Mas era esse o objetivo! Já sei que o problema da área mínima foi o mais difícil, mas e relativamente aos outros dois, o que me podes dizer?

Maria: No problema 2 não tive muitas dificuldades e achei que o facto de aparecer o simétrico do módulo foi importante para eu perceber que não aparece tudo nos manuais... gostei muito de fazer o problema 3 porque foi onde aprendi mais sobre a calculadora.

Quer a Carolina quer a Francisca também consideraram o problema 3 como sendo o mais acessível e aquele que mais contribuiu para aprenderem a trabalhar com a calculadora, já o problema 1 foi o que acharam mais difícil.

Francisca: No problema 1, tínhamos de nos lembrar de relacionar muitas coisas, eram as áreas, as funções quadráticas, o vértice, os perímetros... senão fosse a professora estar comigo a ajudar-me de vez em quando acho que nunca iria chegar ao fim! E depois era enorme... no problema 2 foi mais fácil. Para mim achei que todos foram importantes ...

Quando questionados se consideraram benéfica a sua participação na resolução de problemas, as três foram unânimes afirmando que acharam estas atividades muito benéficas e proveitosas para a sua aprendizagem.

Investigadora: Achas que a resolução destes três problemas foi benéfica para a tua aprendizagem?

Maria: Eu acho que foi muito importante! Pelo menos eu acho que fiquei a saber mais algumas coisas! Foi pena é só terem sido três...

Investigadora: Então gostavas de ter este tipo de tarefa implementada em sala de aula?

Maria: Eu gostava! O problema é serem difíceis...aqui com a professora é fácil ultrapassar isso mas na sala com os colegas... mas acho que todos beneficiariam!

Tal como a Maria, a Carolina e a Francisca gostariam de ver este tipo de atividade implementada em sala de aula, contudo todas manifestaram a preocupação de que a dificuldade destes poderia desestabilizar o funcionamento normal da aula.

Quando questionadas acerca dos critérios de avaliação da disciplina de matemática, que na ESJP se traduz em que 90% da nota final é a média dos testes sumativos e 10% é a nota dada para a autonomia e cidadania, as alunas referem que acham que os testes têm um peso excessivo. Na opinião das três os 90% deviam ter em conta outros instrumentos que não os testes, como é o caso dos relatórios. Porém nenhuma das três gostaria de ver a resolução de problemas utilizada como instrumento de avaliação... a sua dificuldade deixa-as desconfortáveis. A Carolina refere mesmo que o facto de poderem desempenhar um papel na avaliação não lhe agrada.

5 - CONCLUSÕES

Nesta secção referem-se as conclusões obtidas procurando responder às questões de investigação colocadas inicialmente:

1. Como se carateriza a compreensão dos conceitos no estudo das funções a partir de uma abordagem centrada no ensino exploratório?

2. Como se caracterizam os raciocínios desenvolvidos pelos alunos quando envolvidos em ambientes de ensino exploratório?

3. Qual o papel das diferentes representações na aprendizagem do conceito de função?

5. Qual o papel da calculadora gráfica no desenvolvimento do raciocínio matemático?

Apresenta-se ainda uma síntese final que pretende enquadrar o trabalho de investigação desenvolvido e o seu contributo para o processo de ensino e aprendizagem da matemática.

5.1 - COMO SE CARATERIZA A COMPREENSÃO DOS CONCEITOS NO ESTUDO DAS FUNÇÕES A PARTIR DE UMA ABORDAGEM CENTRADA NO ENSINO EXPLORATÓRIO?

Durante todo o processo que envolveu os alunos que participaram neste estudo pode-se detetar que na maioria das vezes houve uma evolução na compreensão dos conceitos que estavam a ser abordados.

Na primeira tarefa exploratória (que deu origem ao primeiro relatório), denotou-se nos alunos algumas dificuldades relativamente a alguns conceitos, nomeadamente na representação algébrica da imagem de um objeto e no conceito de paridade de uma função. Quando confrontados com funções com parâmetros, em que era necessário explorar qual a sua influência no comportamento da função, os alunos não o conseguiram fazer sem auxílio da investigadora, demonstrando que a compreensão dos conceitos que estavam a ser tratados relativamente à função quadrática, ainda estavam numa fase operacional, sendo visível a falta de interiorização dos mesmos, no sentido que lhe é dado por Sfard (1991). Embora os alunos tivessem à sua disposição a calculadora gráfica, não conseguiram tirar partido dessa ferramenta no auxílio à sua aprendizagem.

Na segunda tarefa exploratória “Investigando a função módulo” observou-se uma evolução nos alunos no que concerne à capacidade de mobilizar conhecimentos adquiridos da função quadrática para responder a questões da função módulo. Assim sendo observou-se que houve uma evolução na compreensão de alguns conceitos, nomeadamente da translação associada a um vetor, o que nos leva a supor relativamente a esse conceito os alunos já se encontram numa fase mais avançada da sua compreensão, correspondendo em parte à fase da condensação de Sfard.

Porém, a dificuldade sentida na primeira tarefa quando tiveram que trabalhar com expressões envolvendo parâmetros mantém-se ao longo das três tarefas, o que nos indica que apesar de haver uma evolução destes alunos relativamente a alguns conceitos, eles continuam numa fase de operacionalização não tendo conseguido fazer a passagem para a fase estrutural, ou seja, estes alunos não chegaram a reificar o papel desempenhado pelos parâmetros na expressão algébrica das funções em estudo. Esta dificuldade perece acentuar-se devido ao fraco uso que estes alunos conseguem fazer da calculadora gráfica.

Quando confrontados com o primeiro problema, os alunos manifestaram sérias dificuldades na compreensão do mesmo, nomeadamente na identificação das hipóteses que se pretendiam estudar. Durante toda a resolução os alunos mostraram uma tendência para a realização de procedimentos elementares mostrando fraca apetência para encontrar estratégias adequadas de resolução. Esta dificuldade sentida pelos alunos na resolução deste problema é justificada pela natureza da tarefa, na qual é necessário recorrer a um raciocínio mais abstrato. Essa dificuldade é explicada pela teoria da reificação de Sfard (1991), segundo a qual estes alunos ainda se encontram na fase operacional num processo de interiorização, na qual os processos são realizados em objetos matemáticos elementares e estes processos vão-se tornando cada vez mais acessíveis para o aluno, à medida que ele vai desenvolvendo as suas capacidades, não sendo capazes de realizar a abstração necessária à resolução do problema, própria da reificação.

Outra evidência de que durante a resolução do primeiro problema os alunos ainda se encontravam numa fase operacional, foi quando foi necessário calcular o vértice e o mínimo da função $A(x) = 2y^2 - 18y + 81$. Neste cálculo os alunos não apresentaram dificuldades uma vez que apenas era necessário recorrer a processos algébricos mecânicos e ao conhecimento adquirido anteriormente. Se na aplicação direta dos processos não tiveram dificuldade o mesmo não se passou quando lhes é pedido que apliquem esses conhecimentos num contexto diferente do que estão habituados a trabalhar, como é o caso do cálculo da área do quadrado no contexto do problema, uma vez que esse cálculo não era pedido diretamente, tendo que ser os alunos a mobilizar os conhecimentos acerca da função quadrática para o fazer. Essa situação leva-nos a concluir que apesar de conseguirem mobilizar os seus conhecimntos aplicando corretamente procedimentos e processos que são típicos de determinadas situações matemáticas quando são confrontados com novas situações não são capazes de estender esses conhecimentos adquiridos. Uma vez mais constatámos que os alunos ainda se encontravam num processo de interiorização dos conceitos.

Da observação do desempenho destes alunos no decorrer da resolução deste problema, podemos inferir que grande parte das dificuldades sentidas advém da necessidade que eles têm em particularizar antes de generalizar. Esta observação vai de encontro à ideia defendida por Sfard (1987) na qual a maioria das noções matemáticas a primeira conceção a emergir é a operacional.

No segundo problema (o voo dos gansos) e terceiro problema (administração de antibióticos) as dificuldades sentidas pelos alunos advêm do facto de não terem conseguido a reificação dos conceitos anteriormente aprendidos, pois uma vez mais, dada a natureza do problema, era necessária a abstração atingida pela reificação para a resolução de algumas das questões.

5.2 - COMO SE CARACTERIZAM OS RACIOCÍNIOS DESENVOLVIDOS PELOS ALUNOS QUANDO ENVOLVIDOS EM AMBIENTES DE ENSINO EXPLORATÓRIO?

Oliveira (2002) identifica quatro tipos de raciocínio: 1) indução; 2) dedução; 3) abdução e 4) transformação. Este autor carateriza o raciocínio indutivo sendo um raciocínio que se desenvolve do particular para o geral.

Pólya (1954), refere que este tipo de raciocínio está frequentemente presente na resolução de problemas nomeadamente na generalização, especialização e na analogia.

Após reflexão sobre a forma como os alunos realizaram as diferentes tarefas e respetiva análise dos documentos produzidos, observamos que em todas as tarefas há uma necessidade de particularizar, no entanto, quando há necessidade de inferir sobre o geral não o conseguem, pois não houve reificação dos conceitos. Podemos assim concluir que o recurso a tarefas de exploração e investigação potenciarem o raciocínio (ME, 2001) os alunos apenas operacionalizaram os novos conceitos desenvolvendo um raciocínio indutivo, sem no entanto conseguirem generalizar. Temos como exemplo desta não reificação, as dificuldades manifestadas quando nas tarefas de exploração, relatórios. Veja-se o terceiro relatório, no qual era primeiro proposto que estudassem isoladamente a influência dos parâmetros de uma função polinomial recorrendo a valores concretos, tarefa na qual em geral, os alunos não apresentaram dificuldades. Contudo, quando tiveram que fazer esse mesmo estudo, mas no caso geral, sem concretização dos parâmetros, os alunos apresentaram inúmeras dificuldades, não se apercebendo sequer quando chegaram a conclusões erradas. O que uma vez mais nos leva a concluir que não houve reificação dos conceitos.

Em relação ao raciocínio dedutivo, que Oliveira (2002) caracteriza como um esquema de raciocínio que vai do geral para o particular, podemos afirmar que em nenhum momento do nosso estudo os alunos adquiriram esse raciocínio.

A mesma conclusão se tira relativamente ao raciocínio abdutivo e transformativo.

5.3 - QUAL O PAPEL DAS DIFERENTES REPRESENTAÇÕES NA APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO?

A importância das diferentes representações na aprendizagem do conceito de função tem sido estudada por diversos autores, tais como Kieran (2001), Elia et. al (2007) ou Even (1998). Todos eles referem que uma das principais dificuldades sentidas na aprendizagem do conceito de função é a conversão entre diferentes representações.

Esta mesma dificuldade pode ser identificada no trabalho desenvolvido pelos alunos participantes no estudo, ao longo da resolução dos três problemas propostos.

No primeiro problema proposto, os alunos tiveram que recorrer sistematicamente ao auxílio da investigadora sendo as principais dificuldades sentidas, baseadas nas conversões entre diferentes representações.

Uma das situações onde é visivel essa dificuldade foi no problema do voo dos gansos. Neste problema era pedido aos alunos a passagem de uma representação icónica para a representação gráfica que simbolizava o voo dos gansos e posteriormente para a representação algébrica da função que modelava a situação apresentada.

Também no problema da área mínima essa dificuldade foi sentida em várias ocasiões. Por exemplo, quando confrontados com uma função quadrática mas num contexto diferente do habitual, os alunos não conseguiram aplicar os conhecimentos adquiridos acerca dessa familia de funções, tudo porque "não estavam à espera de ver aparecer uma função quadrática num problema de área" (resposta obtida nas entrevistas). Uma vez mais assistimos à compartimentação dos conhecimentos.

Outra dificuldade sentida ao longo de todas as tarefas foi a compartimentação feita pelos alunos e a consequente fragmentação do pensamento matemático. Essa compartimentação implica uma não mobilização dos conteúdos já apreendidos quando os mesmos se tornam premissas importantes para a construção do novo conhecimento. Esse fenómeno de compartimentação foi estudado e reportado por Elia, et al. (2007).

Como exemplo podemos referir uma situação ocorrida na resolução no primeiro problema pelos alunas do grupo 2. Perante a resolução de um sistema de equações, as alunas demonstraram muitas dificuldades em perceber como operacionalizar a resolução das equações e em usar o método de substituição. Quando questionadas acerca dessa dificuldade quer a Maria quer a Carolina afirmaram que não se lembravam da "matéria". Podemos supor que esse esquecimento advém do facto dos alunos em geral, compartimentarem os conhecimentos relacionando-os com temas e conteúdos específicos (tal como referido em Elia) não sendo capazes de fazer as conexões necessárias entre os diferentes conteúdos.

No primeiro problema, no qual como já foi referido, os alunos tiveram que recorrer sistematicamente ao auxílio da investigadora, as dificuldades sentidas pelos alunos foram exatamente nas conversões entre diferentes representações. Confirmando os resultados obtidos no estudo realizado por Even (1998) e Elia (2007), os alunos não foram capazes de identificar as funções quando apareceram em contextos pouco habituais.

5.4 - QUAL O PAPEL DA CALCULADORA GRÁFICA NO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO DOS ALUNOS?

O papel da calculadora gráfica no desenvolvimento do raciocínio matemático não pode ser estudado de forma aprofundada porque só no momento da aplicação da primeira tarefa é que os alunos tiveram contacto com a calculadora.

Para alguns alunos a introdução da calculadora gráfica não foi vista com agrado, tendo optado por utilizar procedimentos algébricos sempre que possível, principalmente na resolução da primeira tarefa.

No decorrer do nosso estudo observou-se uma crescente aceitação por parte dos alunos à utilização da calculadora, sendo que na última tarefa (problema dos antibióticos) todos os alunos conseguiam manuseá-la sem grande dificuldade.

No entanto, constatou-se que o uso da calculadora na tarefa de exploração da função módulo e da função polinomial permitiu aos alunos explorarem o papel dos diferentes parâmetros, conseguindo em várias situações perceber a influência destes, o que lhe permitiu operacionalizar algumas das translações que podem ser associadas a um vetor e o efeito que isso produz no gráfico da referida função.

No entanto e apesar de inúmeras investigações acerca das vantagens da sua utilização, a calculadora gráfica por si só não ajuda os alunos a decidir quais os aspetos das funções relevantes para a resolução de uma situação problemática, nem como descrever as suas observações e conclusões. É necessário proporcionar um período de aprendizagem para que os alunos sejam proficientes na exploração das diferentes representações que a máquina pode proporcional. A falta desta instrumentação foi observada na tarefa de exploração “Às voltas com funções polinomiais”, onde uma deficiente visualização da janela e um fraco conhecimento teórico levou os alunos a retirarem elações erradas do que visualizavam na calculadora (Ruthven, 1996).

O programa de Matemática para o Ensino Secundário (DES, 2001) alerta para essa situação, ressaltando a importância da confrontação dos conhecimentos teóricos e dos resultados apresentados pela calculadora gráfica.

Para que a utilização da calculadora gráfica potencie e desenvolva o raciocínio matemático, os alunos deverão possuir conhecimentos teóricos acerca do comportamento das funções que estão a ser estudadas. Teixeira et al.(1997) chamam a atenção de que a simples introdução da calculadora gráfica não conduz a uma melhoria significativa da aprendizagem desta disciplina. Quando se representa graficamente uma função na calculadora, o que se vê no visor é apenas uma parte dessa representação. Assim sendo, uma representação gráfica da mesma função com diferentes janelas de visualização assume aspetos distintos que podem sugerir conjeturas “enganadoras”, o que exige que os alunos conheçam algumas características do comportamento dessa função. Daqui ressalta o quão importante é a confrontação dos conhecimentos teóricos e dos resultados apresentados pela calculadora gráfica (DES, 2001). Por essa razão, torna-se necessário que o professor tenha consciência das limitações da calculadora gráfica e um conhecimento sólido das razões que estão por detrás de determinados resultados “enganadores” (DES, 2001).

Em resumo, no decorrer deste estudo os alunos foram apreendendo conceitos sobre funções que manipularam operacionalmente, inclusive na sua representação gráfica. No entanto, revelaram um conhecimento compartimentado não conseguindo, na maioria das situações, estabelecer conexões entre as múltiplas representações. Foi igualmente observado que os alunos não possuem o conceito de função completamente desenvolvido, estando ainda na fase operacional, na fase de interiorização, pois deveriam ter mostrado, na resolução das tarefas propostas, flexibilidade na passagem de um sistema de representação para outro. Observou-se igualmente que apenas o raciocínio indutivo foi utilizado, contudo verificou-se que os alunos não atingiram a fase da generalização (Pólya 1985).

Por fim, e apesar do aspeto visual dos gráficos poder ser visto como uma arma poderosa para a compreensão do conceito de função e das suas propriedades (Domingos, 1994; Ponte; 2009), podem também ser responsáveis por muitas respostas incorretas dadas pelos alunos (Teixeira et al 1997; DES; 2001; Ruthven; 1996). Para prevenir tal é necessário que os alunos possuam conhecimentos teóricos acerca do comportamento das funções que estão a ser estudadas. Uma utilização eficiente da calculadora gráfica, por parte dos alunos, é um processo que exige um trabalho intenso com tarefas diversificadas, através do qual devem ser exploradas as suas diferentes funcionalidades.

É fundamental que o ensino seja pensado de modo a proporcionar aos alunos uma variedade de situações e tarefas, que incluam o recurso a diversas estratégias, como o uso da calculadora gráfica de forma a desenvolver conexões entre representações.

A passagem de uma representação para outra é essencial para que os alunos tenham conhecimento da existência de várias representações que podem ser utilizadas na resolução de tarefas propostas. Aos alunos compete escolher qual a representação mais eficaz na resolução das atividades e, caso seja necessário, devem ter a flexibilidade de estabelecer conexões entre representações.

A sua não utilização mostra-nos que os alunos procuram refugiar-se nos procedimentos e processos de cálculo, deixando pouca margem para a realização de aprendizagens de qualidade onde a reificação dos conceitos seja um domínio comum para conduzir ao desenvolvimento de um pensamento matemático dos alunos cada vez mais complexo e exigente.

6 – BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)… Disponível em: http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/COORDENADORES/Materiais%20Coordenad/Textos/Abrantes%201989.pdf

Abrantes, P. & Leal, L. (1991). Avaliação da aprendizagem/avaliação na aprendizagem. Inovação, 3 (4), pp. 65-75.

Abrantes, P. (1995). Avaliação e educação em matemática. Série reflexões em educação matemática. Disponível em: http://www.ime.usp.br/~iole/GEN5711/Avalia%E7%E3o%20e%20EducaMatem%E1tica%20Paulo%20Abrantes.pdf

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). A matemática na educação básica. Lisboa: Ministério da Educação/Departamento da Educação Básica (ME/DEB). (pp. 203-233). Rotterdam: Sense Publishers.

APM (1987). Estatutos. Lisboa: APM.

APM (1988). A renovação do currículo de Matemática. Lisboa: APM.

APM (1998). Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática. Lisboa: APM.

Arcavi, A. (1999). "The role of visual representations in the teaching and learning of mathematics" Proceedings of the 21st Annual Meeting of PME-NA. Hitt, F. & Santos, M. (Eds.) pp. 55-80.

Benavente, A., Sebastião, J., Seabra, T. & Campiche, J. (1994). Renunciar à escola. O Abandono escolar no Ensino Básico. Lisboa: Fim de Século.

Bodgan, R., & Biklen, S. (1994). Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.

Borba, M. (1993). Students' understanding of transíormations of functions using multi-representational software. Tese de doutoramento apresentada na Cornell University.

Caraça, B. J. (1951). Conceitos fundamentais da Matemática. Lisboa: Gradiva.

Carreira, S. (2010). Conexões matemáticas: ligar o que foi desligado. Educação Matemática, 100, 13-18.

Chazan, D., & Yerushalmy, M. (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: research on algebra learning and directions of curricular change. In J. Kilpatrick, W.

Martin, & D. Schifter, A research companion to principles and standards for school mathematics (pp. 123-135). Reston VA: NCTM.

Cockcroft, W. (1982). Mathematics Counts. London: HMSO.

Confrey, J. & Smith, E. (1992). Revised accounts of the function concept using multi-representacional software, contextual problems and student paths. Em W. Geeslin & K. Graham (Eds.), Proceedings of the Sixteenth PME Conference, Vol. 1 (pp. 153-160). Durham, EUA: University of New Hampshire.

DES (2001). Programa de Matemática A, 10º ano. ME, Departamento do Ensino Secundário.

DGEBS-ME (1991a, b). Organização curricular e programas - Ensino Básico, 2º ciclo, 3º ciclo. (Vol. I). Lisboa: ME.

DGEBS-ME (1991c). Matemática, Métodos Quantitativos - Ensino Secundário: organização curricular e programas. Lisboa: ME

DGEBS-ME (1991d, e). Programa de Matemática - Ensino Básico, 2º ciclo: plano de organização do ensino-aprendizagem (Vol. II). Lisboa: ME.

Domingos, A. M. (1994). A aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações (Tese de mestrado, Universidade Nova de Lisboa). Lisboa: APM.

Domingos, A. (2003). Compreensão de conceitos matemáticos avançados: a matemática no inicio do superior. Lisboa: FCT-UNL.

Duarte, J. (2000). A resolução de problemas no ensino da matemática. Educação & Comunicação. N.º 4, p. 97-100.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1(2), 1-16.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61, 103-131.

Eisner, E. W. (1997). Cognition and representation: A way to pursue the American dream? Phi Delta Kappan, 78(5), 348-353.

Elia, I. (2007). Relations between secondary pupils conceptions about functions and problem solving in different representations. International Journal of Science and Mathematics Education,5, 533-556.

Elia, I., Gagatsis, A., Demetriou, A. (2007), “The Effects of Different Modes of Representation on the Solution of One-step Additive Problems”. Learning and Instruction, 17, 658-672.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. Journal of Mathematical Behavior, 17(1), 105-121.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. C. (Ed.), The roles of representation in school mathematics (pp. 173-185). Reston: VA: NCTM.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 25(2), 116-140.

Gresalfi, M. S., & Cobb, P. (2011). Negotiating a vision of high-quality mathematics teaching in the context of professional development. Journal for Research in Mathematics Education, 42(3), 270-304.

Guimarães, H.M. (2007). Por uma Matemática nova nas escolas secundárias: perspectivas e orientações curriculares da matemática moderna. In: Matos, J. M; Valente, W. R. (orgs.) A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: primeiros estudos. São Paulo: GHEMAT.

Hershkowitz, R., & Kieran, C. (2001). Algorithmic and meaningful ways of joining together representatives within the same mathematical activity: An experience with graphing calculators. In Proceedings of PME 25 (vol. 1, pp. 96-107). Utrecht, The Netherlands.

Kaldrimidou, M., & Ikonomou, A. (1998). Epistemological and metacognitive factors involved in the learning of mathematics: The case of graphic representations of functions. In H. Stenbring, M. B. Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), Language and communication in the mathematics classroom (pp. 217-278). Reston:VA: NCTM.

Kantowski, M. G. (1981). Problem solving. In Fennema (Ed.), Mathematics education research: Implications for the 80's (pp. 111-126).

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), Mathematics Classroms that Promote Understanding (pp. 133-155). Mahwah: Erlbaum.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2001). The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. Educational Studies in Mathematics, 46(1-3), 187 – 228.

Kieran, C. (2006). Reserch on the learning and teaching of algebra: A broadening of sources os meaning. In G. A., & B. P. (Ed.s), Handbook of research on the psycology of mathematics education (pp. 11-50). Rotterdan: Sense.

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, *Vol. XVI*, 1, 5-26

Kilpatrick, J. (1991). Some Issues in the Assessment of Mathematical Problem Solving. Mathematical Problem Solving and New Information Technologies (pp. 37-44). Springer-Verlag

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8. Reston, VA: NCTM

Leal, L. (1992). Avaliação das aprendizagens num contexto de inovação curricular. (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Ludke, M. & André, M., (1986) Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária Ltda.

Matos, J. (2008) . A resolução de problemas e a identidade da educação matemática em Portugal. Disponível em: http://www.uv.es/puigl/JMMatosseiem2008.pdf

Menino, H. (2004). O relatório escrito, o teste em duas fases e o portefólio como instrumento de avaliação das aprendizagens em Matemática – um estudo no 2º ciclo do Ensino Básico. (Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: Universidade de Lisboa

Merriam, S. (1988) Case study research in education: A qualitative approach. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Ministério da Educação (2001). Matemática A - 10.º ano. Cursos Gerais de Ciências Naturais, Ciências e Tecnologia, Ciências Sócio-Económicas. Lisboa: DES.

Ministério da Educação (2007). Programa de Matemática do ensino básico. Lisboa: DGIDC.

Mosquito, E. M.L. (2008). Práticas Letivas dos Professores de Matemática do 3ºciclo do Ensino Básico. (Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: Universidade de Lisboa

National Council of Supervisors of Mathematics, (NCSM, 1978). Position statements on basic skills. The Math. Teacher, 71(February), 147-152.

National Council of Teachers of Mathematics, (NCTM, 1980). Agenda for action: recommendations for school mathematics of the 1980s. Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1985). Agenda para acção — Recomendações para o ensino da matemática nos anos 80 (J. M. Matos e L. Serrazina, Trad.). Lisboa.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM,1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. NCTM: Reston VA

National Council of Teachers of Mathematics (1991). Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar. Lisboa: APM e IIE [original em inglês, publicado em 1989]. (Tradução portuguesa da edição original de 1989).

National Council of Teachers of Mathematics (1994). Normas profissionais para o ensino da Matemática (Tradução de A. P. Canavarro, L. Moreira, L. C. Leal, M. J. Veloso & M. M. Graça). Lisboa: APM/IIE. (Tradução portuguesa da edição original de 1991).

National Council of Teachers of Mathematics (1999). Normas para a avaliação em matemática escolar. Lisboa: APM [original em inglês, publicado em 1995].

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM

National Council of Teachers of Mathematics (2007). Princípios e Normas para a Matemática Escolar. Lisboa: APM [Tradução portuguesa da edição original de 2000].

Nunes, C. (2004). A avaliação como regulação do processo de ensino-aprendizagem da Matemática – um estudo com alunos do 3º ciclo do Ensino Básico. Dissertação de mestrado Universidade de Lisboa, Lisboa.

Oliveira, P. (2002). A investigação do professor, do matemático e do aluno: Uma discussão epistemológica (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: DEFCUL.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. Educação e Matemática 100, 3-9.

Patton, M. (1987). How to use qualitative methods in evaluation. Newbury Park, CA: Sage.

Pereira, M. e Saraiva, M. J. (2008). O sentido do símbolo na aprendizagem da Álgebra em alunos do 7.º ano de escolaridade. Proceedings XII Simpósio de la Sociedad Española de Investigación Matemática/ XXVIII Encontro de Investigação em educação Matemática/ XIX Seminário de Investigação em Educação Matemática, pp. 517-527. Espanha: Faculdad de Educación de Badajoz.

Pólya, G. (1954). Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics (Vol. 1). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Ponte, J. (1984). Functional reasoning and the interpretation of cartesian grafhs.
Lisboa: APM.

Ponte J. P. (2001). Tecnologias de informação e comunicação na educação e na formação de professores: Que desafios para a comunidade educativa? In A. Estrela e J. Ferreira (Eds.), Tecnologias em educação: Estudos e investigações (Actas do X Colóquio da AFIRSE, pp. 89-108). Lisboa: Universidade de Lisboa, Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação.

Ponte, J. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Grupo de Trabalho sobre Investigação), Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. (2003). A crise no ensino da matemática. Educação e Matemática. Lisboa, nº 71, p. 3-8.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. (2006). Estudos de caso e educação matemática. Bolema 25, pp.105-132.

Ponte, J. P. (2009). O novo programa de matemática como oportunidade de mudança para os professores do ensino básico. Interacções, 12, 96-114.

Ponte, J. P., Guimarães, H., Leal, L. C., Canavarro, P., & Abrantes, P. (1997). O conhecimento profissional dos professores de matemática: Relatório final do projecto "O saber dos professores - concepções e práticas". Lisboa: DEFCUL.

Ponte, J. P., & Matos, J. F. (1996). Processos cognitivos e interacções sociais nas investigações matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), Investigar para aprender Matemática (pp. 119-138). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Ponte, J. P., Matos, J. M. e Abrantes, P. (1998). Investigação em educação matemática. Implicações curriculares. Lisboa: IIE.

Ponte, J. P., Oliveira, H. & Brocardo, J. (2003). Investigações matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2009). O novo programa de Matemática: Uma oportunidade de mudança. Educação e Matemática, 105, 2-6.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães. H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Meneses, L., Martins, M. E. G. & Oliveira, P. (2007). Programa de matemática do ensino básico. Lisboa: ME/Direcção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC).

Roldão, M. (2004). Gestão do currículo e avaliação de competências. Lisboa: Editorial Presença.

Russel, S. J. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), Developing mathematical reasoning in grades K-12 (NCTM Yearbook) (pp. 1-12). Reston, VA: NCTM.

Ruthven, K. (1996). Calculators in the mathematics curriculum: the scope of personal computational technology. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrik & C. Laborde (Eds.), International Handbook of Mathematics Education (pp.435-468). Netherlands: Kluwer.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In P. Abrantes & F. Araújo (Coord.), Avaliação das aprendizagens das concepções às práticas (pp. 75-84). Lisboa: Ministério da Educação: DEB.

Saraiva, M. (2002). O conhecimento e o desenvolvimento profissional de professores de Matemática: Um projecto colaborativo (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural. In J.C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Orgs.) Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 162-169). Montreal, Canada.

Sfard, A. (1989). Transition from operational to structural conceptions: The notion of function revisited. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Orgs.) Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 151-158). Paris, França.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Orgs.), The concept of function (pp. 59-84). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. Educational Studies in Mathematics, 26, 191-228.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. Bolema, 14, 66-91.

Slavit, D. (1997). An alternative route to the reification of function. Educational Studies in Mathematics, 33, 259–281.

Socas, M., Machado, M., Palarea, M., & Hernandez, J. (1996). Iniciacion al àlgebra. Madrid: Síntesis.

Stake, R. (2005). Qualitative case studies. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), The Sage Handbook of Qualitative Research.Thousand Oaks: Sage Publication, 443-466.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997). Funções-10.ºano de escolaridade. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Thompson, P. W. (1996). Imagery and the development of mathematical reasoning. In Theories of learning mathematics

Vale, I. (2000) Didáctica da Matemática e Formação Inicial de Professores num Contexto de Resolução de Problemas e de Materiais Manipuláveis. Aveiro. Universidade de Aveiro.

Wood, et al. (1996). Criar um ambiente na aula para falar sobre matemática. Educação e Matemática, 40, 39–43.

Yin, R K. (1989) Case Study Research – Design and Methods. London: Sage Publications.

ANEXOS

ANEXO 1 - AUTORIZAÇÃO DO ENCARREGADO DE EDUCAÇÃO

Exmo. Encarregado de Educação do(a) aluno(a):

nº do 10.º ano, turma:

Vai ser desenvolvido com os alunos desta turma, nas aulas de Matemática, uma Investigação para compreender quais as dificuldades e benefícios retirados pelos alunos de instrumentos de avaliação tais como o portefólio, relatórios escrito, testes de duas fases, e analisar como pode o professor utilizar essas informações para promover a aprendizagem futura dos alunos**.**

Para tal, solicito a sua autorização para recolher alguns dados do seu educando, no âmbito da resolução de tarefas matemáticas, que permitem perceber a forma como ele viveu as aulas e o modo como pensa e aprende. Informa-se que os dados recolhidos para a Investigação não servirão para avaliar o seu educando, mas sim para tentar compreender a perceção que tive das aulas lecionadas e será preservado o anonimato do aluno.

Note-se que analisar o que os alunos têm a dizer sobre este tipo de aulas é fundamental para divulgar esta experiência e, assim, contribuir para uma melhoria do ensino da Matemática.

Com os melhores cumprimentos,

Montijo, 02 de Fevereiro de 2015

(Inês Mota, estagiária de Matemática)

Declaro que autorizo a recolha de dados, referente às tarefas realizadas pelo meu educando , nas aulas de Matemática, com a estagiária Inês Mota, no âmbito de uma Investigação sobre Instrumentos de Avaliação

___ / 02 / 2015

______________________________ (Encarregado de Educação)

ANEXO 2 - GUIÃO DO DIÁRIO DE BORDO

Aula nº __

Tarefa nº __

Data __

Durante a aula

1.1. *Introdução da tarefa*

1.2. *Desenvolvimento da tarefa*

1.3. *Discussão geral*

Após a aula

1.4. *Reconstrução de diálogos*

1.5. *Reflexão*

Observações:

ANEXO 3 - GUIÃO DA ENTREVISTA SEMI-ESTRUTURADA

Problema/ Objetivos:

Conhecer, na perspetiva do aluno, a pertinência, potencialidades e limitações da utilização do relatório escrito e da resolução de problemas na avaliação de aprendizagens em Matemática.

Conhecer as opiniões dos alunos sobre as experiências vivenciadas relativamente aos relatórios escritos e à resolução de problemas e qual a seu papel na aquisição dos conhecimentos.

Conhecer a perceção dos alunos sobre os relatórios e resolução de problemas após as suas experiências.

Conhecer opiniões dos alunos sobre a pertinência da introdução dos relatórios escritos e resolução de problemas como instrumentos de avaliação alternativos na sua avaliação final.

Questões de Investigação:

1.Como se carateriza a compreensão dos conceitos no estudo das funções a partir de uma abordagem centrada no ensino exploratório? 2. Como se caracteriza os raciocínios desenvolvidos pelos alunos quando envolvidos em ambientes de ensino exploratório?3.Qual o papel das diferentes representações na aprendizagem do conceito de função? 4.Qual o papel da calculadora gráfica no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos?

ANEXO 4 - GUIÃO DA ELABORAÇÃO DE UM RELATÓRIO

Um relatório é um trabalho escrito que descreve e critica toda a criatividade desenvolvida na exploração de uma tarefa.

Um relatório para quê?

Desenvolver a tua capacidade de comunicar matematicamente por escrito. Desenvolver o teu pensamento critico sobre o trabalho feito. Contribuir para aprofundar a tua compreensão sobre os vários assuntos estudados.

Pistas para elaborares um relatório:

- tira apontamentos durante a realização da tarefa;
- descreve o que fizeste de uma forma limpa, clara e organizada;
- não te esqueças de apresentar os teus raciocínios e descobertas e descrever todas as tentativas que realizaste até chegar às conclusões finais, não deves pensar "o professor ja sabe isto, por isso não vale a pena eu escrever";
- identifica devidamente o teu relatório;
- estrutura o relatório em introdução, desenvolvimento e conclusão.

Introdução

Apresentem a tarefa proposta e indiquem qual o seu objetivo, usando as vossas próprias palavras. Indiquem os materiais utilizados.

Desenvolvimento

- Relatem os passos do trabalho realizado, explicando como pensaram e as estratégias usadas.
- Descrevam as dificuldades sentidas e como as ultrapassaram.
- Apresentem as conclusões obtidas, devidamente fundamentadas. Podem recorrer a tabelas, representações gráficas ou esquemas.

Conclusão

- Faz um comentário global sobre o trabalho desenvolvido.
- Auto-avalia o teu trabalho.
- Resume o que aprendeste.
- Comenta o interesse da tarefa.

Critérios de Avaliação/Auto-avaliação do Relatório

Apresentação do Relatório	0 ...não respeita a estrutura proposta. ...comete muitos erros ortográficos e/ou apresenta uma construção frásica muito deficiente, dificultando a compreensão do que está escrito. ...apresenta o relatório muito rasurado e sujo.	1 ...não respeita grande parte da estrutura proposta. ...comete erros ortográficos e, por vezes, apresenta uma construção frásica incorreta, mas a compreensão do que está escrito não é dificultada. ...apresenta o relatório limpo e sem muitas rasuras.	2 ...respeita em grande parte a estrutura proposta. ...utiliza corretamente a língua portuguesa, de uma maneira geral. ...apresenta o relatório limpo e sem muitas rasuras.	3 ...respeita completamente a estrutura proposta. ...utiliza corretamente a língua portuguesa, de uma maneira geral. ...apresenta o relatório limpo e sem rasuras.

Recurso a Estratégias e Processo de Exploração	0 ...não apresenta estratégias apropriadas. ...não apresenta um processo de exploração ou apresenta um processo de exploração totalmente desadequado.	1 ...apresenta estratégias apropriadas. ...apresenta um processo de exploração pouco organizado e muito incompleto.	2 ...apresenta estratégias apropriadas. ...apresenta um processo de exploração organizado e quase completo.	3 ...apresenta estratégias apropriadas. ...apresenta um processo de exploração metódico e completo.
Mobilização de informação/ conhecimentos	0 ...não recorre a informações/ conhecimentos essenciais à exploração da tarefa.	1 ...reconhece informações/ conhecimentos essenciais à exploração da tarefa, mas não os aplica adequadamente.	2 ...reconhece informações/ conhecimentos essenciais à exploração da tarefa e aplica-os correctamente, em grande parte.	3 ...reconhece e aplica adequadamente informações/ conhecimentos essenciais à exploração da tarefa.

	0	1	2	3
Descrição e Explicação da Atividade Desenvolvida **(Comunicação)**	...não descreve os passos do trabalho realizado nem a forma como os seus elementos pensaram. ...não descreve nem explica as conclusões obtidas.	...descreve parcialmente os passos do trabalho realizado e a forma como os seus elementos pensaram. ...descreve as conclusões obtidas, mas não as explica na totalidade.	...descreve e explica todos os passos do trabalho e a forma como os seus elementos pensaram, incluindo as tentativas feitas e as conclusões obtidas. ...descreve as conclusões obtidas, mas não as explica na totalidade.	...descreve e explica todos os passos do trabalho e a forma como os seus elementos pensaram, incluindo as tentativas feitas e as conclusões obtidas. ...descreve as conclusões obtidas, e explica-as na totalidade.

	0	1	2	3
Linguagem Matemática Escrita	...não utiliza linguagem matemática.	...utiliza linguagem matemática com imprecisões.	...utiliza linguagem matemática, com pequenas imprecisões.	...utiliza linguagem matemática revelando um bom conhecimento sobre as relações entre os termos e conhecimentos usados.

	0	1	2	3
Reflexão Crítica Sobre a Atividade Desenvolvida	...não saliento as ideias centrais da atividade e/ou referi ideias não relacionadas com a atividade. ...não dou uma opinião sobre a atividade desenvolvida. ...não avalio o meu trabalho.	...apresento ideias relacionadas com a atividade, mas não destaco as essenciais. ...dou uma opinião sobre a atividade desenvolvida, mas não a justifico. ...não avalio o meu trabalho.	...apresento as ideias centrais da atividade. …comento a atividade desenvolvida. ...avalio o meu trabalho, fazendo uma reflexão crítica sobre o meu desempenho no grupo e explicando as principais dificuldades que senti.	...resumo as ideias centrais da atividade, de forma clara. ...comento a atividade desenvolvida. ...avalio o meu trabalho, fazendo uma reflexão crítica sobre o meu desempenho no grupo, explicando as principais dificuldades que senti e identificando aspetos a melhorar.

Semana, S. e Santos L. (2008). Porque é importante explicar como pensei: Os relatórios escritos na regulação das aprendizagens em Matemática. ProfMat. APM Disponível em: http://www.apm.pt/files/_Co_Semana_Santos_4867d48354e95.pdf

ANEXO 5 - RELATÓRIOS

INVESTIGANDO A FUNÇÃO QUADRÁTICA (Tarefas Propostas)

Chama-se **FUNÇÃO QUADRÁTICA** a uma função real de variável real do tipo

$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c, a \neq 0,}$ com $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$, cujo gráfico é uma parábola.

FUNÇÕES DA FAMÍLIA $\boldsymbol{y = ax^2, a \neq 0}$

1. Represente graficamente as funções

$$y_1 = x^2 \quad ; \quad y_2 = \frac{1}{3}x^2 \quad ; \quad y_3 = -x^2 \quad ; \quad y_4 = -\frac{1}{3}x^2$$

2. Analise o gráfico e registe as suas conclusões. Indique nomeadamente, para cada função:

   - O domínio;
   - O contradomínio;
   - A existência do eixo de simetria;
   - A existência e o número de zeros;
   - Intervalos e monotonia;
   - Sentido de concavidade;
   - Coordenadas do vértice da parábola.

3. No caso geral como se relaciona o gráfico da função $y = ax^2$, $a \neq 0$ com o de $y = x^2$? Como é que o parâmetro **a** influencia o gráfico da função?

4. Represente graficamente as funções

$$y_5 = (x-1)^2 \quad ; \quad y_6 = (x+1)^2$$

5. Analise o gráfico e registe as suas conclusões. Indique nomeadamente, para cada função:
   - O domínio;

- O contradomínio;
- A existência do eixo de simetria;
- A equação do eixo de simetria;
- A existência e o número de zeros;
- Intervalos de monotonia;
- Sentido de concavidade;
- Coordenadas do vértice da parábola.

6. Represente graficamente as funções

$$y_7 = 2x^2 + 1 \quad ; \quad y_8 = 2x^2 - 1$$

7. Analise o gráfico e registe as suas conclusões. Indique nomeadamente, para cada função:
    - O domínio;
    - O contradomínio;
    - A existência do eixo de simetria;
    - A equação do eixo de simetria;
    - A existência e o número de zeros;
    - Intervalos de monotonia;
    - Sentido de concavidade;
    - Coordenadas do vértice da parábola.
8. Com base nas Investigações feitas anteriormente estude e sistematize o comportamento da função quadrática quando apresentada da forma $y = a(x-h)^2 + k$, e identifique o significado e os efeitos dos parâmetros **a, h** e **k.**

    Represente as funções graficamente.

    Analise os gráficos indicando nomeadamente o eixo de simetria, as coordenadas do vértice da parábola, a existência e o número de zeros, o sentido da concavidade, o contradomínio da função.

    Estude a sua paridade. Justifique analiticamente a sua conclusão.

Elabore um relatório com o registo dos gráficos e as conclusões a que chegou.

INVESTIGANDO A FUNÇÃO QUADRÁTICA (Tarefas realizadas pelos alunos)

1. Com base nas Investigações feitas anteriormente estude e sistematize o comportamento da função quadrática quando apresentada da forma $y = a(x-h)^2 + k$, e identifique o significado e os efeitos dos parâmetros **a, h** e **k.** Represente as funções graficamente.

   Analise os gráficos indicando nomeadamente o eixo de simetria, as coordenadas do vértice da parábola, a existência e o número de zeros, o sentido da concavidade, o contradomínio da função.

   Estude a sua paridade. Justifique analiticamente a sua conclusão.

Elabore um relatório com o registo dos gráficos e as conclusões a que chegou.

INVESTIGANDO A FUNÇÃO MÓDULO

Chama-se função módulo ou função valor absoluto à função real de variável real definida por:

$$|\boldsymbol{x}| = \begin{cases} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{se} \ \ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{x} & \boldsymbol{se} \ \ \boldsymbol{x} < 0 \end{cases}$$

Faça um estudo aprofundado da função módulo, pelo menos, nos seguintes aspetos:

1. Esboce o gráfico da função módulo recorrendo à sua calculadora gráfica.
2. O que acontece ao gráfico função módulo quando sofre translações na direção dos eixos coordenados: distingue o caso de translações segundo o eixo das abcissas e segundo o eixo das ordenadas.
3. O que acontece ao gráfico da função módulo quando sofre translações em direções distintas dos eixos coordenados.
4. Seja g uma função real de variável real, tal que:

   $$g(x) = a|x| \ com \ a \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$$

Como pode construir o gráfico da função g a partir do gráfico da função módulo? Distinga os casos de $a > 1 \ e \ 0 < a < 1$

Elabora um relatório com o registo dos gráficos e as conclusões a que chegaste.

ÀS VOLTAS COM FUNÇÕES POLINOMIAIS

FUNÇÃO POLINOMIAL

Chama-se função polinomial a uma função f, real de variável real, do tipo

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n x^0$$

Com $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$

1. Recorrendo à calculadora gráfica esboce os gráficos das funções, reais de variável real, definidas por:

$$y = x^3 \quad e \quad y = -x^3$$

Analise os gráficos e registe as suas conclusões relativamente a:

- Domínio;
- Contradomínio;
- Existência de zeros;
- Intervalos de monotonia;
- Injetividade;
- Continuidade.

2. Recorrendo à calculadora gráfica esboce os gráficos das funções, reais de variável real, definidas por:

$y = (x-2)^3$ e $y = (x+2)^3$

Analise os gráficos e registe as suas conclusões relativamente a:

- Domínio;
- Contradomínio;
- Existência de zeros;
- Intervalos de monotonia;

- Injetividade;
- Continuidade.

3. Recorrendo à calculadora gráfica esboce o gráfico da função, real de variável real, definida por:

$$y = x^3 - 3x^2 + 2x$$

Analise o gráfico e registe as suas conclusões relativamente a:

- Domínio;
- Contradomínio;
- Existência de zeros;
- Intervalos de monotonia;
- Injetividade;
- Continuidade.

4. Por fim faça um estudo da família de funções: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$, fazendo variar cada um dos coeficientes reais a, b, c e d separadamente. (Atribua valores positivos e negativos, inteiros e fracionários, valores grandes e valores próximos de zero)

Elabore um relatório com o registo, de forma cuidada, dos esboços dos gráficos, das conjeturas que efetuou e das conclusões que retirou.

Compare o seu estudo com o realizado pelos seus colegas.

ANEXO 6 - PROBLEMAS

ÁREA MÍNIMA

Um fio de 36 cm de comprimento vai ser dividido em duas partes, cada uma delas serve para construir um quadrado. Determina em que ponto deve ser cortado o fio de modo a que a soma das áreas dos quadrados seja mínima.

Explica todas as opções tomadas no decorrer da resolução

O VOO DOS GANSOS

Figura 2.2.1. – Voo dos gansos 1

Esta forma de viajar em grupo parece ser importante na economia da energia gasta pelo grupo.

Quando uma ave dá um impulso com as asas, provoca um fluxo de ar ascendente que é aproveitado pela ave que se segue, reduzindo a energia que esta tem de despender. Deste modo, só a ave que lidera a formação não tem vantagem imediata, pelo menos até ser substituída por uma das outras.

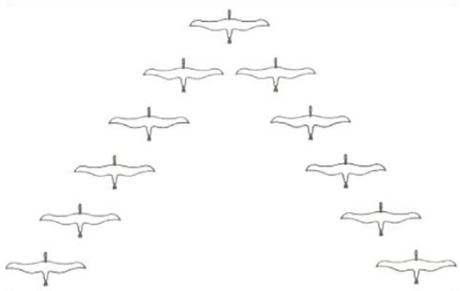


Figura 2.2.2. – Voo dos gansos 2

1. Escolha um referencial adequado à imagem anterior.

2. Qual a função que melhor se adapta à posição dos gansos.

3. Escolha uma unidade e determine as coordenadas de três ou quatro gansos.

4. Define analiticamente a função que melhor se ajusta à posição dos gansos.

ADMINISTRAÇÃO DE ANTIBIÓTICO

Doses terapêuticas iguais de um certo antibiótico são administradas, pela primeira vez, a duas pessoas: a Clara e o Joaquim.
Admita que, durante as sete primeiras horas após a tomada simultânea do medicamento pela Clara e pelo Joaquim, as concentrações de antibiótico, medidas em miligramas por litro de sangue, são dadas, respetivamente, por:

$$\mathbf{C\,(t) = 0{,}1\,t^3 - 1{,}7t^2 + 7t} \quad \text{e} \quad \mathbf{J\,(t) = -0{,}1\,t^3 + 0{,}6t^2 + 0{,}7t}$$

A variável t designa o tempo, medido em horas, que decorre desde o instante em que o medicamento é tomado ($t \in [0,7]$).

Recorrendo à calculadora gráfica responda às seguintes questões:

1. *Determine o valor da concentração deste antibiótico no sangue da Clara, quinze minutos depois de ela o ter tomado. Apresente o resultado, em miligramas por litro de sangue, arredondado às centésimas.*

2. *No instante em que as duas pessoas tomam o medicamento, as concentrações são iguais (por serem nulas). Determine quanto tempo depois as concentrações voltam a ser iguais. Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondado às unidades).*

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3. *Considere as seguintes questões:*

1ª. *Quando a concentração ultrapassa 7,5 miligramas por litro de sangue, o medicamento pode ter efeitos secundários indesejáveis. Esta situação ocorrerá, neste caso, com alguma destas duas pessoas? Caso afirmativo, com quem? E em quantos miligramas por litro o referido limiar será ultrapassado?*

2ª. *Depois de atingir o nível máximo, a concentração começa a diminuir. Quando fica inferior a 2 miligramas por litro de sangue, é necessário tomar nova dose do medicamento. Quem deve tomá-la em primeiro lugar, a Clara ou o Joaquim? E quanto tempo antes do outro?*

Utilize as capacidades gráficas da sua calculadora para investigarr estas duas questões. Numa pequena composição, explicite as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente.

Apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às décimas)